

Plan wykładów

1. **Sprawy organizacyjne:** zasady uczestnictwa w wykładach, zasady zaliczenia kursu, podręczniki i materiały dydaktyczne (OZE-otwarte zasoby edukacyjne). Metodologia fizyki: cele fizyki; układy jednostek fizycznych, jednostki podstawowe i pochodne; konwersja jednostek; przedrostki wielkości metrycznych; analiza wymiarowa; szacowanie w fizyce. Elementy rachunku wektorowego.
2. **Kinematyka:** układy współrzędnych, wielkości kinematyczne: podstawowe definicje, ruch jednostajny, jednostajnie zmienny, ruch po okręgu, ruchy dwuwymiarowe (rzut ukośny).
3. **Dynamika punktu materialnego:** masa, pęd, siła; zasady dynamiki Newtona.
4. **Nieinercjalne układy odniesienia**
5. **Praca i energia mechaniczna:** praca, energia (kinetyczna i potencjalna), moc; zasada zachowania energii (mechanicznej); pola zachowawcze.
6. **Zasada zachowania pędu:** pęd, popęd siły, zasada zachowania pędu; zderzenia.
7. **Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej:** środek masy, moment: siły, pędu, bezwładności; zasada zachowania momentu pędu, tensor momentu bezwładności.
8. **Grawitacja:** pole grawitacyjne, prawo powszechnego ciążenia, prawa Keplera.
9. **Ruch okresowy:** oscylator harmoniczny prosty.
10. **Fale mechaniczne:** równanie falowe, fale sprężyste, prędkość fazowa, zasada superpozycji, interferencja, fale dźwiękowe.
11. **Termodynamika fenomenologiczna:** przemiany gazowe (izotermiczna, izochoryczna, izobaryczna, adiabatyczna), równanie stanu gazu doskonałego praca gazu, energia wewnętrzna, zasady termodynamiki.
12. **Termodynamika fenomenologiczna cd:** silniki cieplne, zjawiska termoelektryczne.
13. **Elementy termodynamiki statystycznej:** idee opisu statystycznego, wyprowadzenie równania stanu gazu idealnego, interpretacja temperatury, zasada ekwipartycji energii cieplnej,
14. **Elementy hydromechaniki płynów:** płyn idealny i rzeczywisty, hydrostatyka płynów: prawa Pascala i Archimiedesa, przepływ płynu, prawa: ciągłości, Bernoullego.
15. **EGZAMIN**

Omówione zagadnienia:

12.10.2024

Rola fizyki w życiu codziennym

Podział wielkości fizycznych na podstawowe i pochodne

Wzorce niektórych jednostek wielkości podstawowych

Jednostki i ich przedrostki (np. G – giga, n – nano i in.)

Przydatność analizy jednostek (czy możliwe są np. działania: $3m+4kg$, $1m+3m^2$, $1+2m$? Czy wzór $s=vt^2$ (s- droga, v- prędkość, t – czas) może mieć sens? Czy np. wyrażenia $\sin(3kg)$, 2^{5s} lub $\log(2m)$ mają sens fizyczny?

Przeliczanie jednostek np. $2,7 \frac{g}{cm^3} = 2,7 \frac{0,001kg}{(0,01m)^3} = 2,7 \frac{10^{-3}kg}{10^{-6}m^3} = 2,7 \cdot 10^3 kg/m^3$

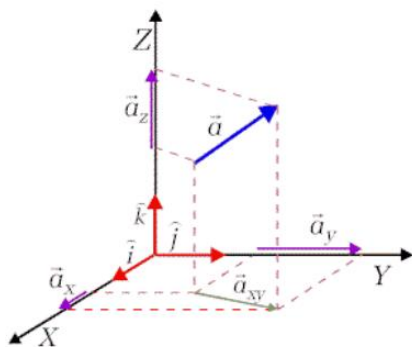
Przydatność obliczeń szacunkowych

Podział wielkości fizycznych na skalary, wektory

19.10.2024r

Działania na wektorach

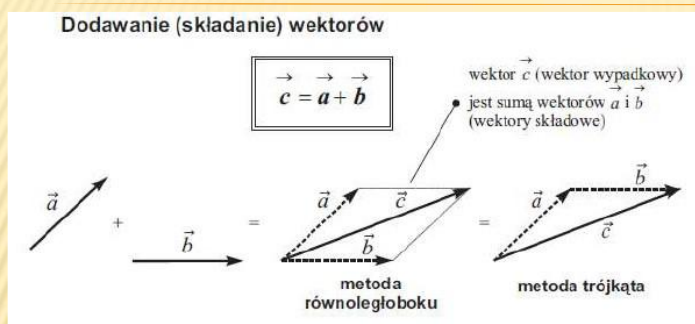
Zapis wektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ lub $\vec{a} = [a_x \ a_y \ a_z]$



Długość wektora: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Dodawanie i odejmowanie wektorów:

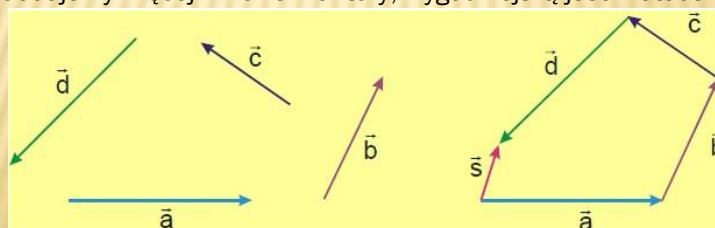
Działania na wektorach – dodawanie)



$$|\vec{c}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

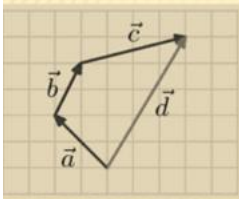
gdzie α – kąt między wektorami

Gdy dodajemy więcej niż dwa wektory, wygodniejszą jest metoda trójkąta.



Działania na wektorach – analityczne dodawanie i odejmowanie

Dodawanie wektorów – wykorzystanie składowych wektora



$$\vec{a} = [-2, 2] \quad \vec{b} = [1, 2] \quad \vec{c} = [4, 1]$$

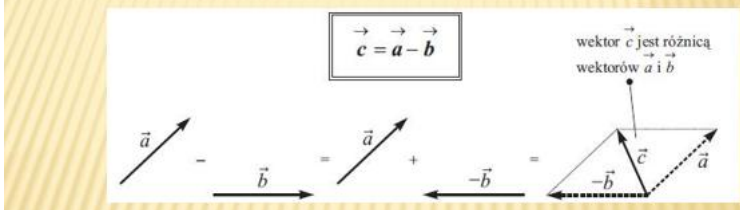
$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = [-2, 2] + [1, 2] + [4, 1] = [-2 + 1 + 4, 2 + 2 + 1] = [3, 5]$$

Więc ogólnie, dodawanie i odejmowanie wektorów przy pomocy składowych:

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = [a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z]$$

Graficzne odejmowanie wektorów:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Mnożenie wektorów:

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny z definicji:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Iloczyn skalarny można też wyrazić wzorem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Stąd wynika, że:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

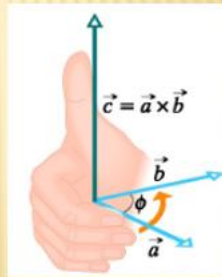
Przykład zastosowania w fizyce. Praca stałej siły: $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$

Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zapisywanym $\vec{a} \times \vec{b}$ jest wektor $\vec{c}$ prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz mający długość:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) = ab \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

Zwrot wektora $\vec{c}$ określony jest przez regułę śruby prawoskrętnej lub prawej dłoni:



Iloczyn wektorowy można też zapisać przy pomocy wyznacznika i jego rozwinięcia:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Lub:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \end{bmatrix}$$
$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Przykłady zastosowania iloczynu wektorowego w fizyce

Moment siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment pędu: $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

Siła Lorentza: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$

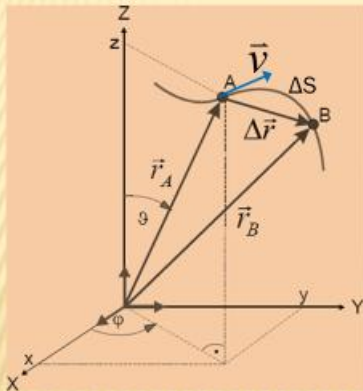
Kinematyka punktu materialnego

Nie istnieje pojęcie ruchu absolutnego. Do opisu ruchu wymagany jest układ odniesienia i obrany w nim układ współrzędnych.

Klasyfikacja ruchów

- ze względu na tor: prostoliniowy, krzywoliniowy (po okręgu, rzut ukośny, inne)
- ze względu na zależność położenia od czasu: jednostajny, jednostajnie zmienny, pozostałe

Wektor wodzący punktu materialnego i jego prędkość



Cząstka porusza się po torze z punktu A do B w czasie Δt przebywając drogę Δs

wektor wodzący:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = [x \quad y \quad z]$$

prędkość chwilowa:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \right] = [v_x \quad v_y \quad v_z]$$

wartość prędkości:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

prędkość średnia:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

średnia szybkość:

$$v_{sr} = \frac{\text{cała droga}}{\text{cały czas}}$$

Przykład:

Ciało pokonało drogę 6m wzdłuż okręgu wykonując pełny obrót w czasie 2s.

Pytanie:

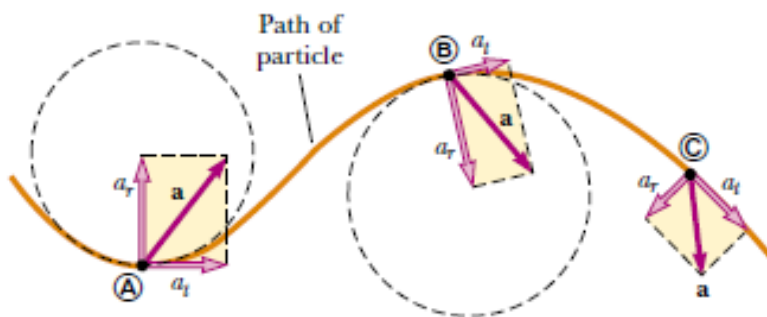
Jaka jest średnia prędkość ciała w tym czasie?

Jaka jest średnia szybkość w tym czasie?

Przyspieszenie: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{dv_x}{dt} \quad \frac{dv_y}{dt} \quad \frac{dv_z}{dt} \right] = [a_x \quad a_y \quad a_z], \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

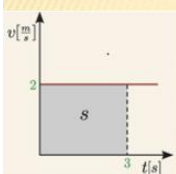
Przyspieszenie styczne: $a_{st} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$ (na rysunku poniżej a_t)

Przyspieszenie normalne: $a_n = \frac{v^2}{R}$ (na rysunku a_r – radialne tzn. wydłuż promienia krzywizny)



$$a = \sqrt{a_{st}^2 + a_n^2}$$

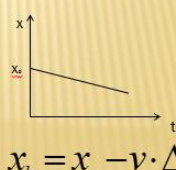
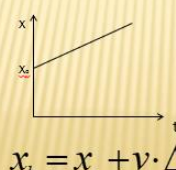
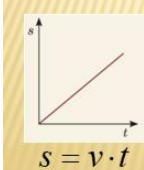
RUCH JEDNOSTAJNY PROSTOLINIOWY



Ruch wzdłuż osi x

$$\vec{v} = \text{const} \quad \vec{a} = 0 \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{x_k - x_o}{\Delta t}$$



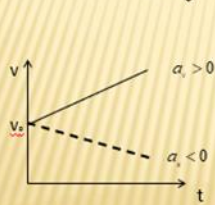
Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy $\vec{a} = \overline{const}$

Jest to ruch prostoliniowy ze stałym przyspieszeniem.

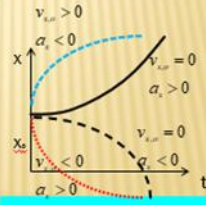
W tym przypadku przyspieszenie chwilowe i średnie są sobie równe:

$$a = const = \frac{v(t) - v_o}{t - t_o}$$

gdzie: v_o jest prędkością dla czasu t_o .
Więc dla: $t_o = 0$ mamy:



$$v(t) = v_o + a \cdot t$$



$$x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Swobodny spadek

Pytanie:

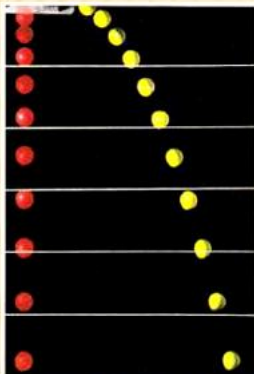
W tym samym momencie puszczone swobodnie z tej samej wysokości dwa ciała o różnych masach. Które z tych ciał spadnie szybciej? Opór powietrza zanedbujemy.

Oczywiście spadną w jednakowym czasie, ponieważ gdy możemy zaniebac opory powietrza wszystkie ciała spadają z jednakowym przyspieszeniem zwanym **przyspieszeniem ziemskim**.

$$g = 9.81 m / s^2$$



Doświadczenie demonstrujące niezależność ruchów:

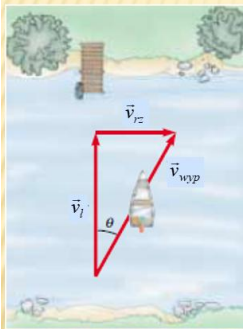


Ruch w pionie nie wpływa na ruch w poziomie.

Ciało rzucone poziomo spadnie w tym samym czasie co ciało swobodnie spadające, bo w pionie oba ciała mają zerową prędkość początkową.

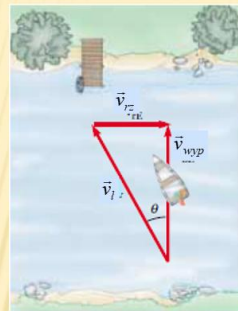
• Zasada niezależności ruchów (superpozycji) – jeśli jakiś punkt bierze udział jednocześnie w kilku ruchach, to wypadkowe przesunięcie punktu równe jest sumie wektorowej przesunięć wykonanych przez ten punkt w tym samym czasie w każdym z tych ruchów oddzielnie.

Prędkość wypadkowa (dodawanie prędkości)



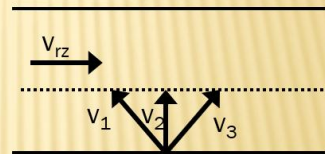
$$\vec{v}_{wyp} = \vec{v}_l + \vec{v}_{rz}$$

$$v_{wyp} = \sqrt{v_l^2 + v_{rz}^2}$$



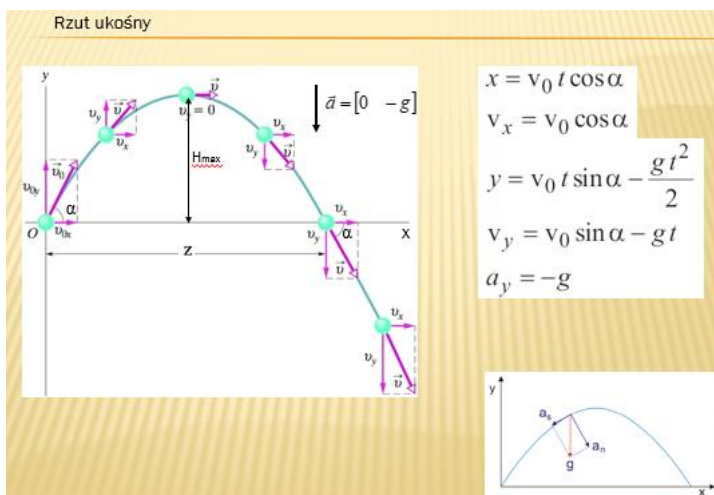
$$\vec{v}_{wyp} = \vec{v}_l + \vec{v}_{rz}$$

$$v_{wyp} = \sqrt{v_l^2 + v_{rz}^2}$$



Która łódka dotrze pierwsza do przeciwległego brzegu?

Rzut ukośny:



Rzut ukośny cd (czas ruchu t_k , zasięg Z , maksymalna wysokość H_{max}) :

$$\begin{aligned} x &= v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha & y &= v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2} \\ v_x &= v_{0x} = v_0 \cos \alpha & i \quad v_y &= v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - g t \\ a_x &= 0 & a_y &= -g \end{aligned}$$

Równania te pozwalają wyznaczyć parametry rzutu ukośnego.

A) Czas trwania rzutu otrzymujemy podstawiając $y=0$, czyli

$$0 = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}, \text{ skąd } t=0 \text{ (chwila początkowa) lub } t = t_k = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ (chwila upadku ciała).}$$

B) Zasięg rzutu otrzymamy podstawiając do wzoru $x = v_0 t \cos \alpha$ czas $t = t_k$, czyli

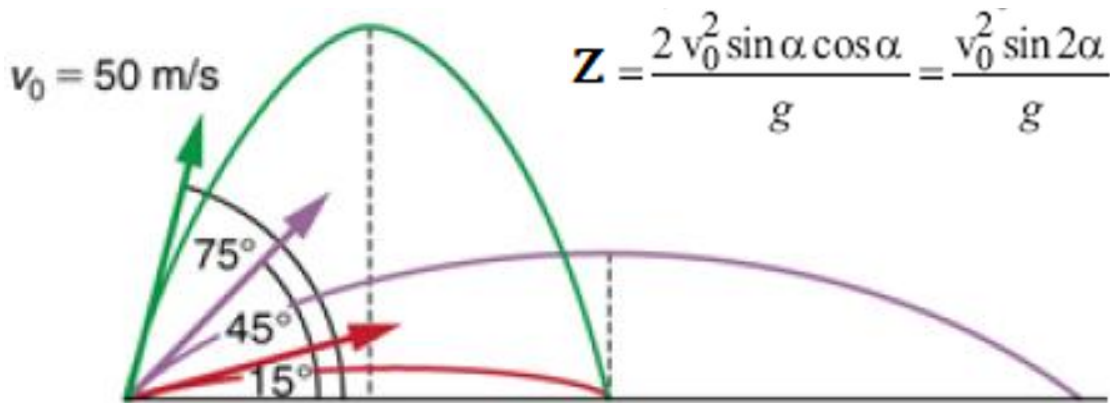
$$Z = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

C) Maksymalna wysokość na jaką wzniesie się ciało $H_{max} = y$ gdy $v_y = 0$. Z równania

$$0 = v_0 \sin \alpha - g t \text{ wyznaczamy czas wznoszenia się ciała } t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \text{ i podstawiamy do wzoru}$$

$$H_{max} = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Zasięg Z jest największy dla kąta 45° .



Równanie toru w rzucie ukośnym:

■ Równanie toru wyznaczamy podobnie jak w rzucie poziomym z równań $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Z

pierwszego wyznaczamy czas $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ i wstawiając do drugiego otrzymujemy

$$y = v_0 \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2,$$

czyli

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Jest to również równanie paraboli skierowanej ramionami w dół, której maksimum jest dla

$$x = \frac{Z}{2}.$$

Zestawienie wzorów

Ruch postępowy

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Jednostajnie zmienny ($a = \text{const}$)

$$v(t) = v_o + a \cdot t$$

$$x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$



gdzie:

ω – prędkość kątowa

ε – przyspieszenie kątowe

Ruch po okręgu

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Jednostajnie zmienny ($\varepsilon = \text{const}$)

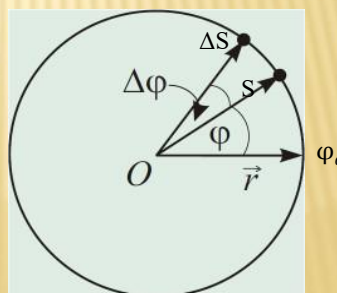
$$v = \omega \cdot r$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$a_{st} = \varepsilon \cdot r$$

$$\omega(t) = \omega_o + \varepsilon \cdot t$$

$$\varphi(t) = \varphi_o + \omega_o \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$$



Prędkość względna ciała A względem ciała B : $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

Przyspieszenie względne ciała A względem ciała B: $\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$ lub $\vec{a}_{AB} = \frac{d\vec{v}_{AB}}{dt}$

Dynamika

Cztery podstawowe rodzaje sił (oddziaływań):

Oddziaływanie	Źródło oddziaływania	Względne natężenie	Zasięg
Grawitacyjne	Masa	około 10^{-38}	Długi
Elektromagnetyczne	Ładunek elektryczny	około 10^{-2}	Długi
Jądrowe	protony, neutrony	1	Krótki (około 10^{-15} m)
Słabe	cząstki elementarne	około 10^{-15}	Krótki (około 10^{-18} m)

Z tych podstawowych sił wynikają wszystkie oddziaływania.

Pierwsza zasada dynamiki

Ciało nie poddane oddziaływaniu żadnych innych ciał (lub gdy oddziaływania równoważą się) albo pozostaje w spoczynku, albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Układ, w którym ciało tak się zachowuje (spełnia I zasadę dynamiki) nazywamy **inercyjnym**

Druga zasada dynamiki Newtona

Jeżeli na ciało działa stała, niezrównoważona siła wypadkowa, to ciało to porusza się z przyspieszeniem proporcjonalnym do tej siły a odwrotnie proporcjonalnym do masy – miary bezwładności tego ciała.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{wyp}}}{m}$$

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

Trzecia zasada dynamiki

Jeżeli ciało A działa na ciało B pewną siłą $\vec{F}_{AB}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$ równą co do wartości bezwzględnej, lecz przeciwnie zwróconą, co wyrażamy wzorem:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Trzecią zasadę dynamiki nazywa się też **zasadą akcji i reakcji**. Obie siły występują jednocześnie. Wynika stąd, że niemożliwe jest istnienie tylko jednej siły.

Czy siły akcji i reakcji się równoważą?

Oczywiście, że **nie!**

Trzecią zasadę dynamiki nazywa się też **zasadą akcji i reakcji**. Obie siły występują jednocześnie. Wynika stąd, że niemożliwe jest istnienie tylko jednej siły.

zdefiniujemy środek masy

Dla układu punktów materialnych:

$$\vec{r}_{\dot{S}M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$x_{\dot{S}M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}$$

$$y_{\dot{S}M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}$$

$$z_{\dot{S}M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}$$

Lub dla bryły litej:

(nie będzie całki na egzaminie)

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

$$x_c = \frac{\int x dm}{M}$$

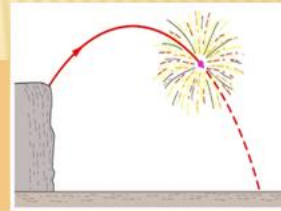
$$y_c = \frac{\int y dm}{M}$$

$$z_c = \frac{\int z dm}{M}$$

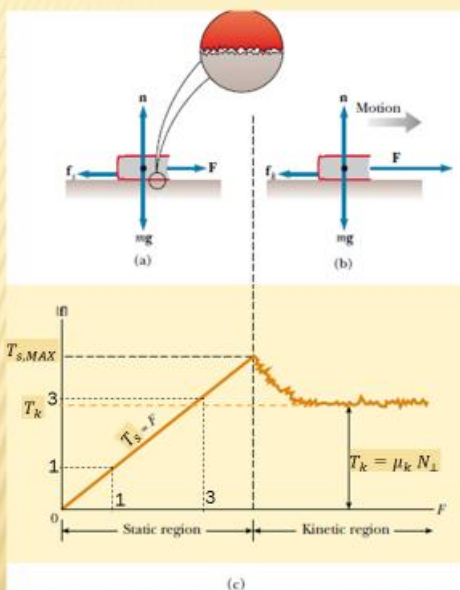
$$M\vec{a}_{\dot{M}} = \vec{F}_{wyp,zew}$$

Zasada ruchu środka masy

Środek masy ciała (układu ciał) porusza się jak punkt o masie równej masie całego układu, do którego przyłożono wszystkie siły zewnętrzne działające na ciało (układ ciał).



Czyli, jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych jest zerowa, to przyspieszenie środka masy też jest równe zero.

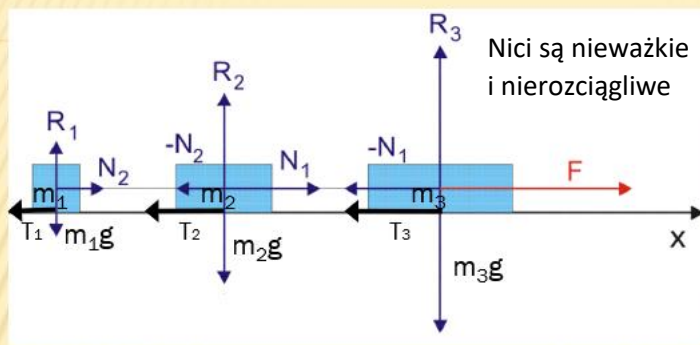


Wsp. Tarcia

- statycznego
- kinetycznego

$$\mu_{s/k} = \frac{T_{s,MAX}/k}{N_{\perp}}$$

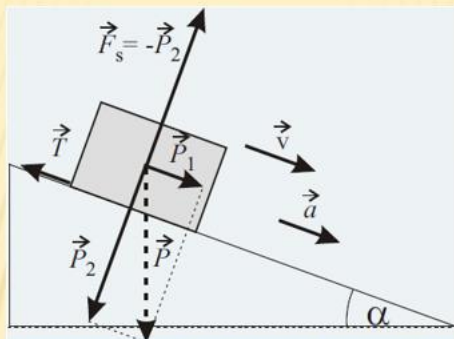
Przykład zastosowania zasad dynamiki Newtona



$$\left. \begin{aligned} m_1 a &= N_2 - T_1 \\ m_2 a &= N_1 - N_2 - T_2 \\ m_3 a &= F - N_1 - T_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{F - T_1 - T_2 - T_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$\Rightarrow N_1 \text{ i } N_2$

Równia pochyła



$$a = \frac{P_1 - T}{m}$$

$$f = \frac{T}{\text{Nacisk}_{\perp}} = \frac{T}{P_2}$$

$$P_1 = P \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$P_2 = P \cos \alpha = mg \cos \alpha$$

Więc:

$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Jaka jest różnica gdy klocek przesuwany w górę równi?

Pęd ciała

Pędem nazywamy wielkość wektorową równą iloczynowi masy ciała i jego prędkości.

Jednostka: kgm/s

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Druga zasada dynamiki
w postaci uogólnionej:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Szybkość zmiany pędu ciała jest równa sile działającej na ciało, która tę zmianę pędu wywołuje.

Uogólnienie obejmuje zjawiska fizyczne, w których masa zmienia się podczas ruchu (np. podczas lotu rakiety jej masa maleje w miarę ubywania paliwa).

Z postaci uogólnionej można uzyskać postać odpowiadającą stałej masie:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

dla stałej masy

Zasada zachowania pędu

Jeżeli $\vec{F}_z = 0$ to $\vec{p}_{ukl} = const$

Jeśli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ punktów materialnych jest równa zero, to pęd całkowity tego układu jest stały.

Dynamika bryły sztywnej

Pojęcie bryły sztywnej

Ciało, które pod działaniem sił nie ulega odkształceniom, tzn. odległości dowolnych punktów takiego ciała pozostają stałe.

Bryła sztywna może wykonywać dwa rodzaje ruchów prostych:

- **postępowy**
- **obrotowy**.

Ze względu na sztywność bryły kąty $d\phi$ zakreślane w pewnym przedziale czasu przez promienie wodzące dwóch dowolnych punktów bryły są jednakowe. Wynika stąd, że poszczególne punkty bryły charakteryzuje **ta sama**

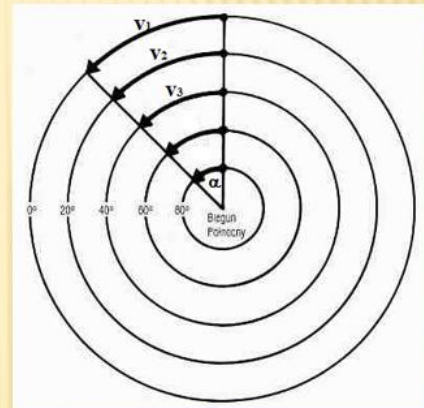
prędkość kątowna: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$

i to samo przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Prędkości liniowe punktów v_i należących do bryły sztywnej wiążą się z ich prędkością kątową ω następującym wzorem:

$$v_i = \omega r_i \quad \text{lub wektorowo: } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



Moment siły

Momentem siły $\vec{F}$ względem punktu O osi obrotu nazywamy iloczyn wektorowy wektora wodzącego $\vec{r}$ punktu przyłożenia siły $\vec{F}$ i tej siły

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = r \cdot F \sin \alpha$$



$$\vec{M} = 0$$

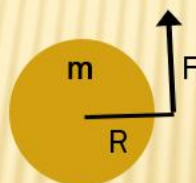
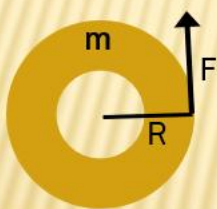


$$M = r \cdot F$$

pytanie

Od czego oprócz momentu siły może zależeć przyspieszenie kątowe bryły?

Od rozkładu masy bryły.



Które ciało łatwiej wprowadzić w ruch obrotowy?

Moment bezwładności

Dla punktu materialnego: $I = mr^2$

Moment bezwładności bryły sztywnej będącej zbiorem punktów materialnych $m_1, m_2, \dots, m_n$, których odległości od osi obrotu wynoszą odpowiednio $r_1, r_2, \dots, r_n$ definiujemy następująco:

Momentem bezwładności I bryły sztywnej względem danej osi nazywamy sumę iloczynów mas poszczególnych punktów bryły i kwadratów ich odległości od danej osi, a więc:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (*)$$

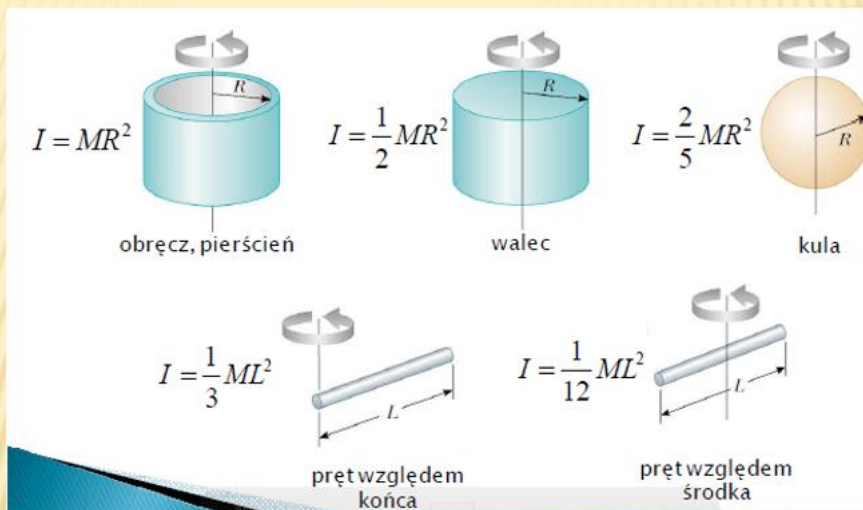
W przypadku bryły o ciągłym rozkładzie masy, dzielimy ją w myśli na nieskończenie małe części i sumowanie we wzorze * zastępujemy całkowaniem:

$$I = \int r^2 dm$$

Na egzaminie nie trzeba znać rachunku całkowego.

Moment bezwładności zależy od masy ciała i jej rozkładu względem osi obrotu.

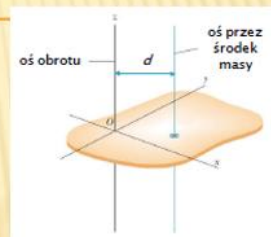
Momenty bezwładności niektórych brył względem osi symetrii przechodzących przez środek masy



Twierdzenie Steinera

Moment bezwładności I bryły względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności I_0 względem osi równoległej przechodzącej przez środek masy bryły oraz iloczynu masy tej bryły i kwadratu odległości d obu osi:

$$I = I_0 + md^2$$



Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego

Bryła nie poddana działaniu momentu siły pozostaje nieruchoma lub wykonuje ruch obrotowy jednostajny.

Druga zasada dynamiki ruchu obrotowego

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

Moment siły działającej na bryłę sztywną jest równy iloczynowi momentu bezwładności I tej bryły oraz jej przyspieszenia kąowego ε .

Trzecia zasada dynamiki ruchu obrotowego

Jeżeli na bryłę A działa bryła B momentem siły $\vec{M}_{AB}$, to bryła B działa na A momentem $\vec{M}_{BA}$ równym co do wartości lecz przeciwnie skierowanym

$$\vec{M}_{AB} = -\vec{M}_{BA}$$

Moment pędu (kręt)

Momentem pędu $\vec{L}$ punktu materialnego o masie m i wektorze wodzącym $\vec{r}$, poruszającego się z prędkością $\vec{v}$ względem osi obrotu odległej o $\vec{r}$ od tego punktu, definiujemy wzorem:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

lub

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

Moment pędu bryły jest sumą momentów pędu wszystkich jej punktów, czyli:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I\vec{\omega}.$$

Moment pędu bryły równa się iloczynowi jej prędkości kątowej ω i momentu bezwładności I .

Uogólniona druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Pochodna momentu pędu bryły względem czasu t jest równa momentowi siły działającej na tę bryłę.

Zasada zachowania momentu pędu

Jeżeli $\vec{M}_z = 0$ to $\vec{L}_{ukł} = \text{const}$

Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ punktów materialnych jest równy zeru, to całkowity moment pędu tego układu jest stały.

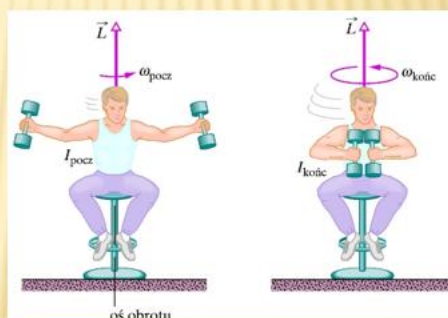
Zasada zachowania momentu pędu przykład

Jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ punktów materialnych jest równy zero, to całkowity moment pędu tego układu jest stały.

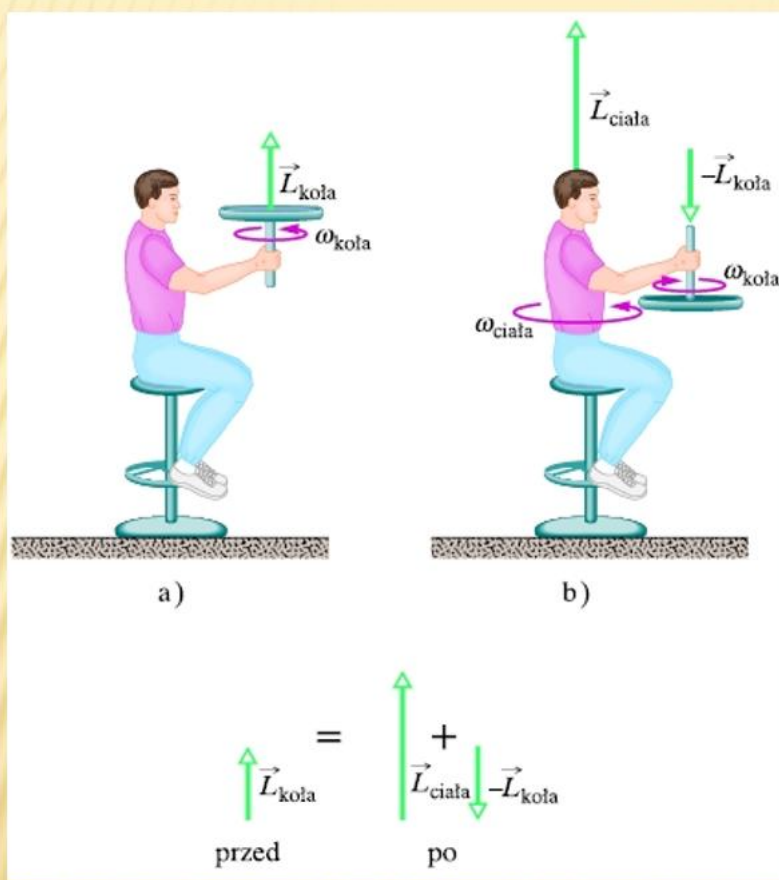
Czyli: $\vec{M}_z = 0 \Rightarrow \vec{L}_{ukl} = \sum_{i=1}^n I_i \vec{\omega}_i = const$

Gdy prędkości kątowe poszczególnych brył są sobie równe, to wtedy:

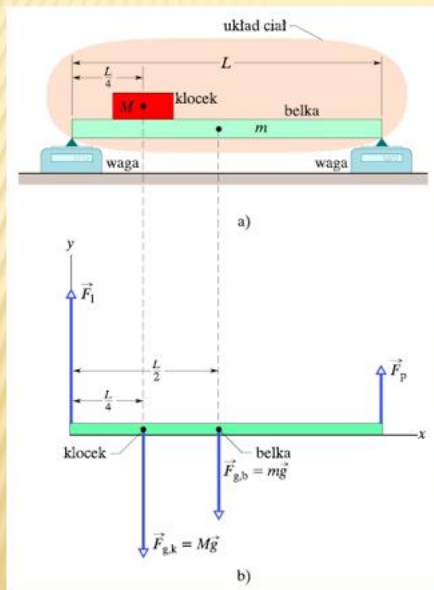
$$\vec{L}_{ukl} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^n I_i = I \vec{\omega} = const$$



Zasada zachowania momentu pędu przykład



STATYKA



1. Brak ruchu postępowego środka masy:

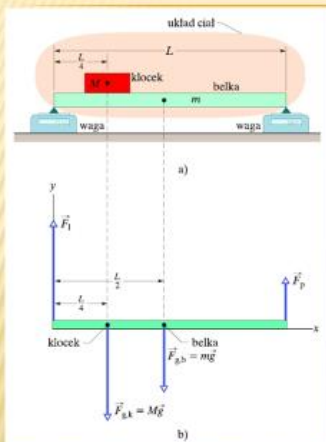
$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

2. Brak ruchu obrotowego wokół środka masy:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \sum_i \vec{M}_i = 0 \end{cases}$$

STATYKA



$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

$$\vec{F}_l + \vec{F}_{g,klocek} + \vec{F}_{g,belka} + \vec{F}_r = 0$$

$$\vec{M}_l + \vec{M}_{g,klocek} + \vec{M}_{g,belka} + \vec{M}_p = 0$$

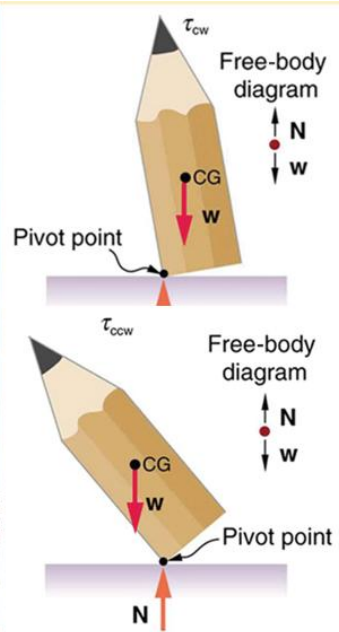
$$F_l - Mg - mg + F_p = 0$$

$$0 + Mg \frac{L}{4} + mg \frac{L}{2} - F_p L = 0$$

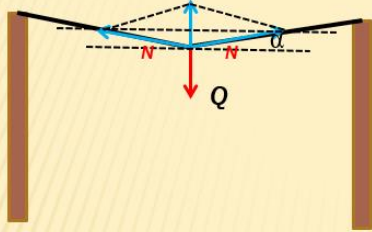
Uwaga: przyjęto że oś obrotu przechodzi przez lewy koniec belki. Równie dobrze można było wybrać oś obrotu przechodzącą przez dowolny inny punkt, bo belka nie obraca się względem każdej osi. Decydując się na określoną oś kierujemy się łatwością obliczeń.

Równanie sił $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (wektorowa suma wszystkich sił działających na nieruchomy układ = 0) jest równaniem wektorowym więc w przestrzeni 3D uzyskujemy z niego 3 osobne równania na składowe tych sił działających odpowiednio wzdłuż osi x, y i z. W powyższym przykładzie działają tylko siły wzdłuż osi y więc dla sił uzyskaliśmy tylko jedno równanie.

Również równanie $\sum_i \vec{M}_i = 0$ (wektorowa suma wszystkich momentów sił działających na nieruchomy układ = 0) jest równaniem wektorowym więc w przestrzeni 3D uzyskujemy z niego 3 osobne równania na składowe tych momentów sił skierowanych wzdłuż osi x, y i z. W powyższym przykładzie działają tylko siły których momenty mogą powodować obrót jedynie wokół osi z prostopadłej do rysunku więc dla momentów sił uzyskaliśmy też tylko jedno równanie.



Naprężenie N napiętej między słupami i obciążonej w środku liny:

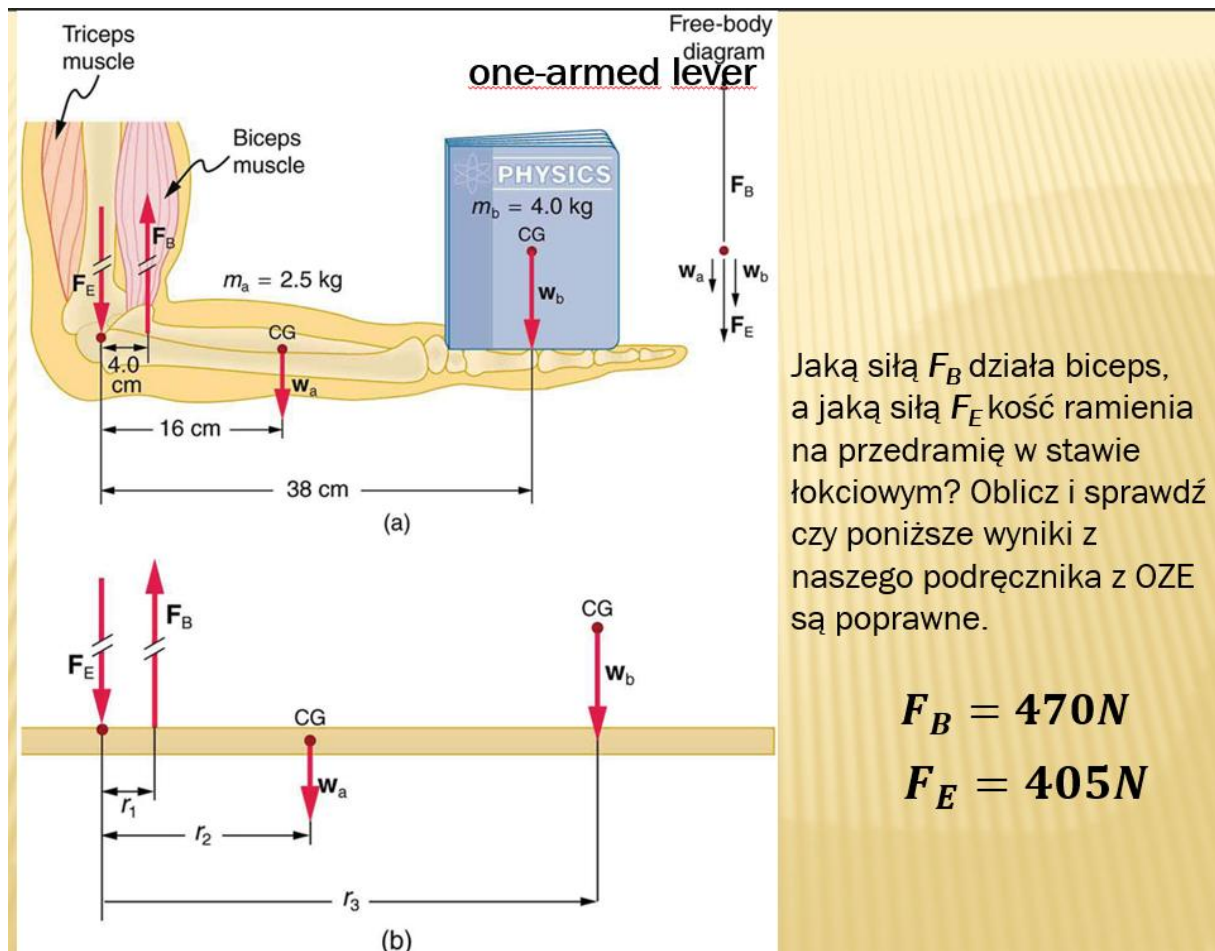


$$\sin \alpha = \frac{Q/2}{N} \Rightarrow N = \frac{Q/2}{\sin \alpha}$$

Np. dla $m = 50\text{kg}$ i $\alpha = 10^\circ$

$$N = 2824\text{N}$$

Czyli jak rozwieszamy hamak siły naciągu linek mogą być wielokrotnie większe niż nasz ciężar



Wstępne rozważania prowadzące do wprowadzenia pojęcia pracy i energii:

Dla ruchu jednostajnego wzdłuż osi x:

$$v_k = v_o + a \cdot t \quad x_k = x_o + v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Stąd: $t = \frac{v_k - v_o}{a}$

Więc: $x_k - x_o = v_o \cdot \frac{v_k - v_o}{a} + \frac{a \cdot \left(\frac{v_k - v_o}{a} \right)^2}{2}$

$$x_k - x_o = \frac{2v_o v_k - 2v_o^2}{2a} + \frac{(v_k - v_o)^2}{2a}$$

$$x_k - x_o = \frac{2v_o v_k - 2v_o^2}{2a} + \frac{v_k^2 - 2v_k v_o + v_o^2}{2a}$$

$$x_k - x_o = \frac{v_k^2 - v_o^2}{2a}$$

ostatecznie:

$$v_k^2 = v_o^2 + 2a(x_k - x_o)$$

Energia kinetyczna a praca - praca stałej siły

$$v_k^2 = v_o^2 + 2a_x(x_k - x_o)$$

$$\frac{v_k^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} = a_x(x_k - x_o)$$

$$\frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} = ma_x(x_k - x_o) \quad \text{Def. energii kinetycznej: energia związana ze stanem ruchu ciała:}$$

$$W = F_x \cdot d_x$$

$$E_k = \frac{mv_o^2}{2}$$

$$\Delta E_k = W$$

Def. pracy: energia przekazana ciału lub odebrana od niego w wyniku działania na nie siły. Gdy energia jest dostarczana to $W > 0$, gdy odbierana $W < 0$.

Praca stałej siły to:

$$W = F_x \cdot d_x = F \cos \phi \cdot d = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Energia kinetyczna a praca - praca zmiennej siły

$$W = \int_{x_{pocz}}^{x_{kon}} F(x) dx = \int_{x_{pocz}}^{x_{kon}} m a dx = \int_{x_{pocz}}^{x_{kon}} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{v_{pocz}}^{v_{kon}} m v dv = \frac{mv_{kon}^2}{2} - \frac{mv_{pocz}^2}{2} = \Delta E_k$$

Całkowanie nie obowiązuje

Ogólny wniosek:

Praca wypadkowej siły działającej na ciało jest równa przyrostowi energii kinetycznej ciała.

$$\Delta E_k = W_{\text{wypadkowej siły}}$$

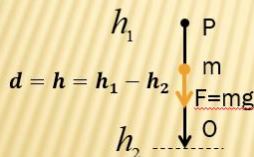
Energia potencjalna

- pola grawitacyjnego (blisko powierzchni Ziemi)

Energia potencjalna pola sił potencjalnych w punkcie P umieszczonego tam ciała o masie m jest równa pracy siły potencjalnej (zachowawczej) wykonanej przy przesunięciu tego ciała od punktu P do punktu odniesienia O.

$$E_p(\vec{r}_p) = W_{P \rightarrow O}$$

Obliczmy energię pola sił grawitacyjnych w pobliżu Ziemi ($a = g = \text{const.}$):



$$E_p(\vec{r}_p) = W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos \phi = mgh$$

Siły zachowawcze i niezachowawcze

O siłach zachowawczych możemy mówić gdy:

- Układ ciał składa się z dwóch lub więcej ciał
- Siła działa między ciałem a resztą układu
- Gdy zmienia się konfiguracja układu, siła wykonuje pracę nad ciałem W_1 i energia kinetyczna ciała zamienia się w inną postać energii układu (jest to energia potencjalna)
- Gdy zmiana konfiguracji układu zachodzi w drugą stronę, zmiana energii zachodzi w przeciwnym kierunku, ale siła wykonuje zawsze pracę $W_2 = -W_1$.

Tę inną postać energii nazywamy energią potencjalną. Nie może to być np. energia cieplna bo nie istnieje możliwość zamiany w 100% tej energii cieplnej z powrotem w energię kinetyczną (sprawności maszyn cieplnych są zawsze $<100\%$).

Czyli np. siła tarcia oraz siła oporu powietrza nie są siłami zachowawczymi.

Całkowita praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się na dowolnej drodze zamkniętej jest równa zeru.

$$W_{\text{sił_zach_na_drodze_zamkn}} = 0$$

Oznacza to, że praca siły zachowawczej nad cząstką przemieszczającą się między dwoma punktami nie zależy od drogi, po której porusza się cząstka.

Dowód:



$$0 = W_{A1B2A} = W_{A1B} + W_{B2A}$$

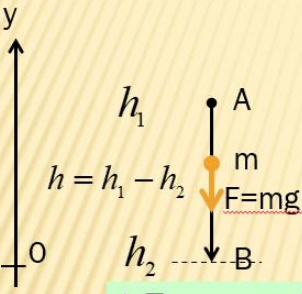
$$W_{A1B} = -W_{B2A}$$

$$W_{A1B} = W_{A2B} \quad \text{bo siła jest zachowacza}$$

Stąd wypływa też wniosek, że w polu sił zachowawczych (potencjalnych) praca siły potencjalnej przy zmianie układu od stanu A do stanu B nie zależy od drogi, po której dokonywana jest ta zmiana.

Powiązmy pracę siły grawitacyjnej (zachowawczej) ze zmianami energii kinetycznej i potencjalnej. Żadna inna siła nie działa na ciało.
Czyli układ jest odosobniony (brak sił zewnętrznych lub równoważą się) i zachowawczy.

Co jest układem? Odp.: Ciało o masie m i Ziemia



1) Wiemy już, że $\Delta E_{k,A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B} > 0$ W naszym przypadku Dlaczego?

2) Obliczmy zmianę energii potencjalnej

$$\Delta E_{p,A \rightarrow B} = E_{p,B} - E_{p,A} = mgh_B - mgh_A = mg(h_B - h_A) = -W_{A \rightarrow B}$$

Więc:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

W naszym przypadku < 0

$$\Delta(E_k + E_p) = 0$$

Energia mechaniczna układu odosobnionego i zachowawczego jest stała

Jest to **zasada zachowania energii mechanicznej** układu

Wiemy, że zmiana energii potencjalnej ciała wiąże się z pracą siły potencjalnej (zachowawczej) wywołującej tę zmianę następująco:

$$\Delta E_p = -W$$

$$\Delta E_p(x) = -W = -F(x)\Delta x$$

Dla stałej siły działającej wzdłuż osi x

$$F(x) = -\frac{\Delta E_p(x)}{\Delta x}$$

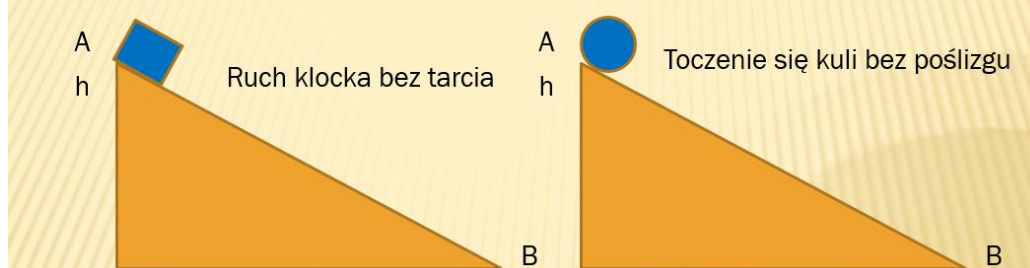
$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

Ogólniej dla zmiennej siły działającej wzdłuż osi x

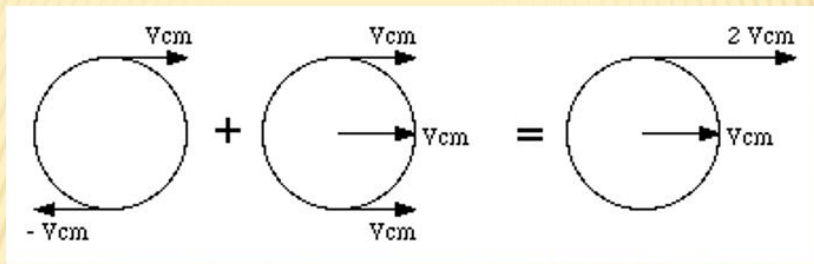
$$\vec{F}(x, y, z) = -\left[\frac{dE_p(x, y, z)}{dx}; \frac{dE_p(x, y, z)}{dy}; \frac{dE_p(x, y, z)}{dz} \right] = -grad(E_p(x, y, z))$$

Najogólniej dla zmiennej siły potencjalnej działającej w dowolnym kierunku

Które z ciał pierwsze dotrze do podstawy równi z takiej samej wysokości h ?



Energia kinetyczna toczącego się ciała



Ruch obrotowy
wokół nieruchomego
środka masy

Ruch postępowy
(translacyjny)

Toczenie się

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{\dot{s}m}^2 + \frac{1}{2} I_{\dot{s}m} \omega^2$$

$v_{\dot{s}m}$ – prędkość liniowa środka masy
Na rysunku $v_{cm} = v_{\dot{s}m}$

Zestawienie wzorów

Ruch postępowy

Ruch po okręgu

$s, \Delta s$

$\varphi, \Delta \varphi$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a_{st} = \varepsilon \cdot r$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$v(t) = v_o + a \cdot t$$

$$\omega(t) = \omega_o + \varepsilon \cdot t$$

$$x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$\varphi(t) = \varphi_o + \omega_o \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$$

m

I

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

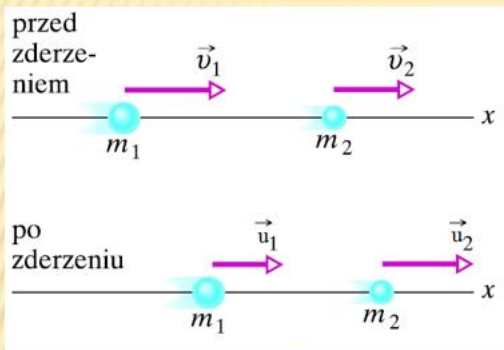
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Zderzenie idealnie sprężyste



Spełniona zasada zach pędu
i energii mechanicznej

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

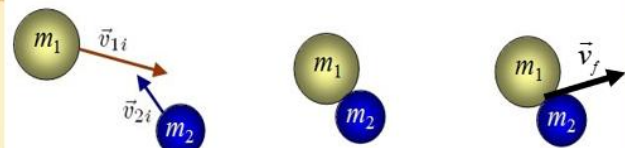
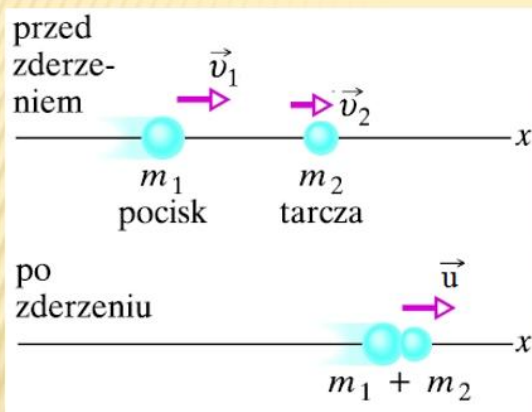
W tym przypadku (zderzenie centralne wzdłuż osi x):

Dla przyjętych

zwrotów jak na rys.:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

Zderzenie idealnie niesprężyste - ciała się zlepiają



Ciała się zlepiają.

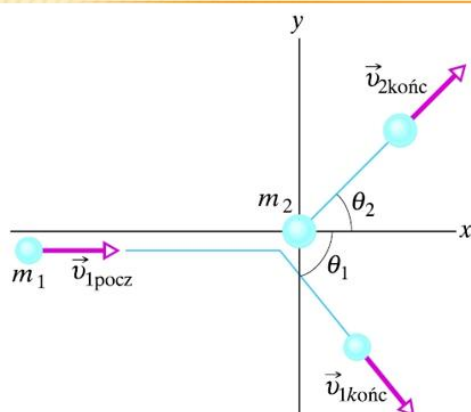
Spełniona jest tylko zasada zachowania pędu.

$$m_1 \vec{v}_{1pocz} + m_2 \vec{v}_{2pocz} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{koń}$$

Zderzenie centralne – przed i po zderzeniu
środki ciał poruszają się zdłuż tej samej linii

Centralne i idealnie niesprężyste: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$

Zderzenie sprężyste w 2D



$$m_1 \vec{v}_{1pocz} + m_2 \vec{v}_{2pocz} = m_1 \vec{v}_{1końc} + m_2 \vec{v}_{2końc}$$

$$\frac{m_1 v_{1pocz}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2pocz}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1końc}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2końc}^2}{2}$$

Dla sytuacji na rysunku:

$$\vec{v}_{2pocz} = 0$$

Zas. Zach. Pędu dla osi x:

Zas. Zach. Pędu dla osi y:

Energia kinetyczna:

$$m_1 v_{1pocz} = m_1 v_{1końc} \cos \theta_1 + m_2 v_{2końc} \cos \theta_2$$

$$0 = -m_1 v_{1końc} \sin \theta_1 + m_2 v_{2końc} \sin \theta_2$$

$$\frac{m_1 v_{1pocz}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1końc}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2końc}^2}{2}$$

Z pomiarów znamy np. θ_1 . Wtedy z układu równań obliczymy θ_2 , $v_{1końc}$ i $v_{2końc}$

Rodzaje energii

W mechanice rozróżniamy **energię kinetyczną** ciał oraz ich **energię potencjalną**.

energia kinetyczna w ruchu postępowym

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Grawitacyjną energię potencjalną ciała w punkcie A określamy jako pracę siły ciężkości przy przenoszeniu ciała z punktu A do punktu odniesienia O.

$$E_p = mgh \quad \text{Blisko powierzchni Ziemi}$$

$$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r} \quad \text{Wzór ogólny (odniesienie w nieskończoności)}$$

energia kinetyczna w ruchu obrotowym

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Energię potencjalną sprężystości ciała w punkcie A określamy jako pracę siły sprężystości przy przenoszeniu ciała z punktu A do punktu odniesienia O (czyli do punktu równowagi).

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

Twierdzenie o pracy W i energii mechanicznej E ciała

Gdy na układ działają zewnętrzne siły niepotencjalne to energia mechaniczna nie będzie zachowana.

Wtedy:

$$\Delta E = W_{\text{wypadkowej sił niepotencjalnych}}$$

$$\Delta E_k + \Delta E_p = W_{\text{wypadkowej sił niepotencjalnych}}$$

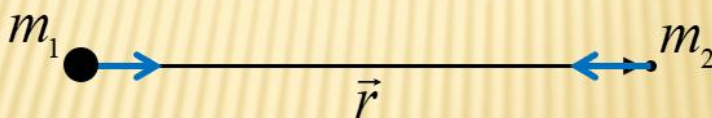
Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia (prawo grawitacji) zostało sformułowane przez Newtona w 1687r. Wynika ono z obserwacji, głównie astronomicznych, oraz z eksperymentów przeprowadzonych na Ziemi.

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 przyciągają się wzajemnie siłą proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości r :

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

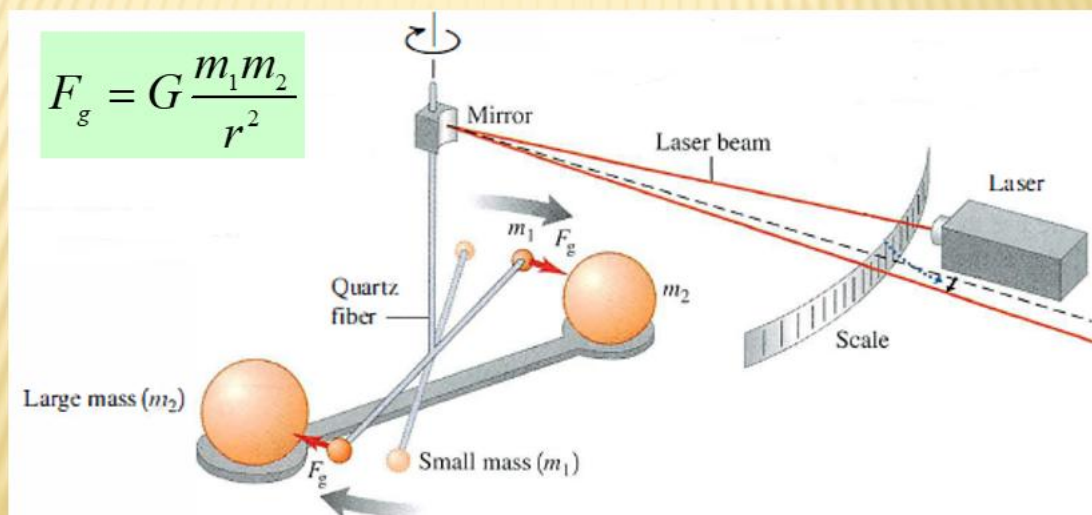
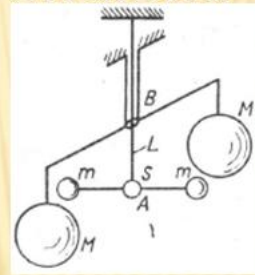
G - stała grawitacyjna, $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$



$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Doświadczenie Henry'ego Cavendisha

Stała grawitacji $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ po raz pierwszy została wyznaczona w 1797r przez Henry'ego Cavendisha przy użyciu wagi skręceń:



Cavendish - cd

Znając stałą grawitacji Cavendish obliczył masę Ziemi:

Przy powierzchni Ziemi: $F_{gr} = mg$

Ogólniej przy pow. Ziemi: $F_{gr} = G \frac{M_z m}{R_z^2}$

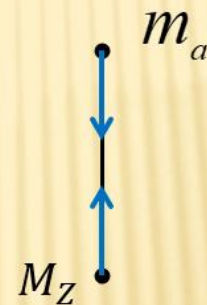
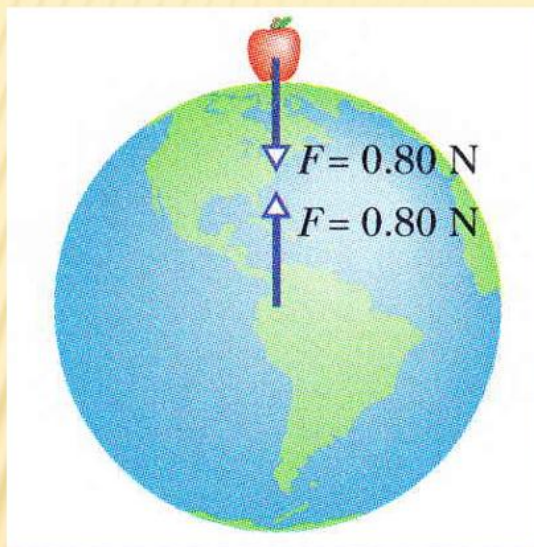
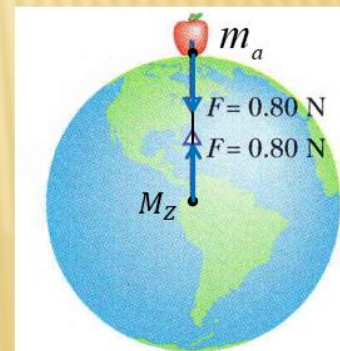
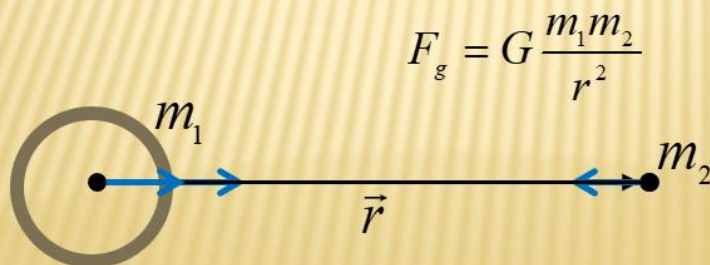
$$G \frac{M_z m}{R_z^2} = mg$$

$$M_z = \frac{g R_z^2}{G}$$

W przypadku ciał rozciągłych o skończonych rozmiarach traktujemy je jak układy punktów materialnych. Każdy punkt jednego ciała przyciąga każdy punkt drugiego ciała. Stosując rachunek całkowy można obliczyć siłę wypadkową przyciągania się rozważanych ciał.

Można jednak udowodnić, że:

*jednorodne ciała kuliste oraz ciała złożone z
jednorodnych warstw kulistych przyciągają się tak, jak
punkty materialne umieszczone w ich środkach.*



Natężenie pola grawitacyjnego

Miarą ilościową pola grawitacyjnego jest jego **natężenie** E_g . Wartość natężenia pola grawitacyjnego jest równa liczbowo sile jaką to pole działa na punkt materialny o masie jednostkowej.

$$\vec{E}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

- **Zasada superpozycji pól** (nakładania się pól): przy nałożeniu się kilku pól (np. ciążenia), natężenie pola wypadkowego równa się sumie wektorowej natężeń wszystkich tych pól.

$$\vec{E}_g = \vec{E}_{g,1} + \vec{E}_{g,2} + \dots + \vec{E}_{g,n}$$

Ciężar ciała.

Siłę, jaką ciało materialne jest przyciągane przez Ziemię nz ciężarem ciała. Ponieważ Ziemia w przybliżeniu jest kulą o jednorodnych warstwach to dla określenia ciężaru ciała można zastosować wzór w postaci:

$$F_g = G \frac{M_z m}{R_z^2}$$

M_z - masa Ziemi,
 m - masa ciała,
 R_z - promień Ziemi.

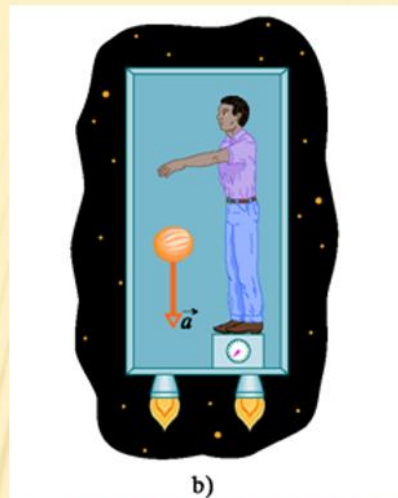
Przyspieszenie ziemskie:

$$a = \frac{F_g}{m} = G \frac{M_z}{R_z^2} = g = 9.81 m/s^2$$

Równoważność masy bezwładnościowej i masy grawitacyjnej



a)



b)

Rys. 14.19. a) Fizyk zamknięty w pojemniku spoczywającym na Ziemi serwuje melon spadający z przyspieszeniem $a = 9,8 \text{ m/s}^2$. b) Jeśli pojemnik porusza się daleko w przestrzeni kosmicznej z przyspieszeniem równym $9,8 \text{ m/s}^2$, to przyspieszenie melona względem fizyka jest takie samo jak na Ziemi. Fizyk nie może stwierdzić na podstawie żadnych doświadczeń wykonanych w pojemniku, w której z tych dwóch sytuacji się znajduje. Na przykład waga, na której fizyk stoi, ma w obu przypadkach takie same wskazania

Przypomnienie:

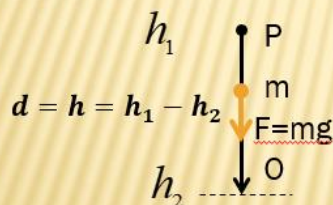
Energia potencjalna

- pola grawitacyjnego (blisko powierzchni Ziemi)

Energia potencjalna pola sił potencjalnych w punkcie P umieszczonego tam ciała o masie m jest równa pracy siły potencjalnej (zachowawczej) wykonanej przy przesunięciu tego ciała od punktu P do punktu odniesienia O.

$$E_p(\vec{r}_p) = W_{P \rightarrow O}$$

Obliczmy energię pola sił grawitacyjnych w pobliżu Ziemi ($a=g=\text{const.}$):



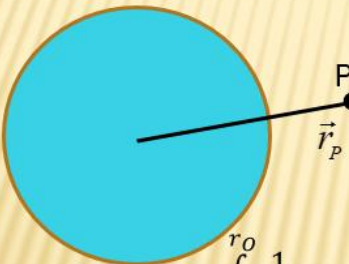
$$E_p(\vec{r}_p) = W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos \phi = mgh$$

Energia potencjalna ogólnie na zewnątrz planety (również daleko od Ziemi)

Energia potencjalna w punkcie P jest to praca $W_{P \rightarrow O}$ siły potencjalnej (zachowawczej) wykonana przy przesunięciu masy próbnej m od tego punktu pola P do punktu odniesienia O

$$E_p(\vec{r}_p) = W_{P \rightarrow O}$$

W rozważaniach ogólnych punkt odniesienia umieszcza się w nieskończoności.

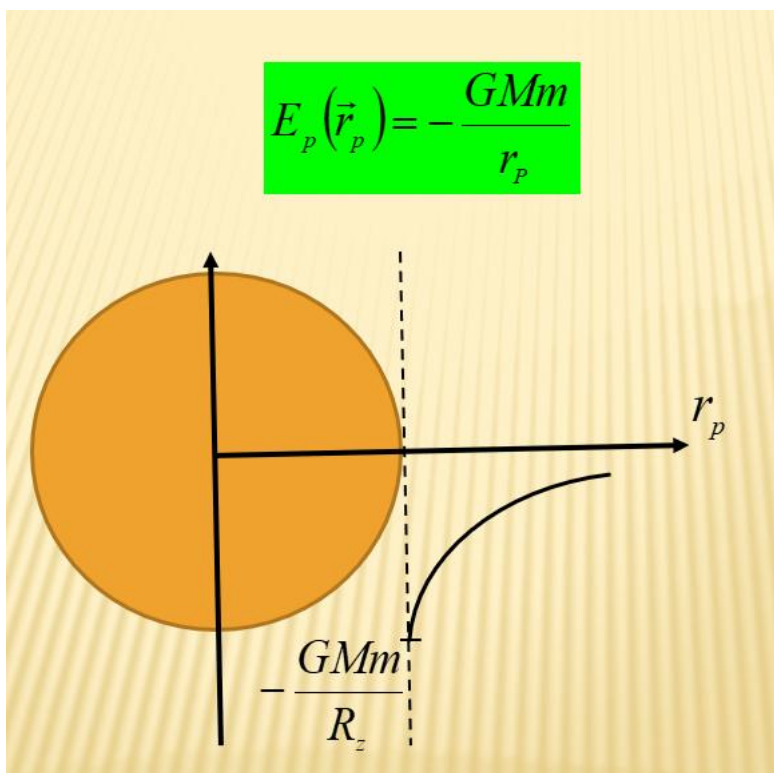


$$E_p(\vec{r}_p) = W_{P \rightarrow O} = \int_{r_p}^{r_o} \vec{F}_g d\vec{r} = - \int_{r_p}^{r_o} F_g dr = - \int_{r_p}^{r_o} G \frac{Mm}{r^2} dr =$$

$$= -GMm \int_{r_p}^{r_o} \frac{1}{r^2} dr = -GMm \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_p}^{r_o} = -GMm \left(-\frac{1}{r_o} - \left(-\frac{1}{r_p} \right) \right) = -\frac{GMm}{r_p}$$

$$E_p(\vec{r}_p) = -\frac{GMm}{r_p}$$

$$E_p(\vec{r}_p) = -\frac{GMm}{r_p}$$



Potencjał pola grawitacyjnego

- Pola charakteryzuje się również pewną wielkością skalarną, zwaną **potencjałem pola**. Równy jest on stosunkowi energii potencjalnej punktu materialnego do jego masy:

$$V \equiv \frac{E_p}{m}$$

W przypadku pola grawitacyjnego pojedynczego punktu materialnego o masie M potencjał tego pola wyraża się wzorem:

$$V_g = -\frac{GM}{r}$$

- Związek pomiędzy natężeniem pola i jego potencjałem: $\vec{E}_g = -\text{grad}(V_g)$

Bo:

$$\vec{F}_g = -\text{grad}(E_{p,g})$$

$$m\vec{E}_g = -\text{grad}(mV_g)$$



Dr hab. inż. Władysław Artur Woźniak

CIAŻENIE POWSZECHNE (GRAWITACJA)

- Pole grawitacyjne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli:

- pole grawitacyjne **na zewnątrz** pustej czaszy kulistej (bądź pełnej kuli) o masie M i promieniu R :

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

- pole **wewnątrz** tejże czaszy:

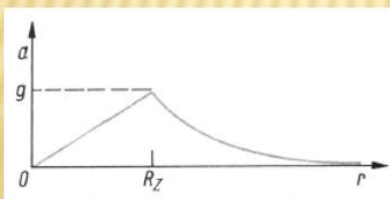
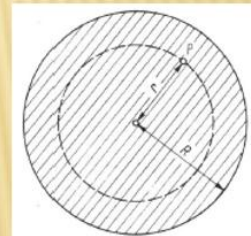
$$g = 0$$

Wkład do wypadkowej siły grawitacji w punkcie P pochodzący od czaszy (r, R) jest zerowy.

- pole **wewnątrz jednorodnej kuli** o gęstości ρ :

Siła grawitacji w punkcie P pochodzi tylko od kuli o promieniu r

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi\rho Gr = \left(G\frac{M}{R^2}\right)\frac{r}{R}$$



Przykład: pole grawitacyjne Ziemi

PIERWSZA PRĘDKOŚĆ KOSMICZNA

Pierwszą prędkością kosmiczną nazywamy prędkość jaką musi mieć punkt materialny swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi (o promieniu $r = R_z$), lub ogólniej wokół ciała niebieskiego o masie M i promieniu r równym pr. tego ciała

$$F_{doś} = F_g$$
$$\frac{mv^2}{R_z} = G \frac{Mm}{R_z^2} \quad \Rightarrow \quad v_I = \sqrt{\frac{GM}{R_z}}$$

Dla Ziemi:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z}} \cong 7,9 \text{ km/s}$$

Dla Księżyca: $v_I = 1,68 \text{ km/s}$

Dla Słońca: $v_I = 436,74 \text{ km/s}$

DRUGA PRĘDKOŚĆ KOSMICZNA

Drugą prędkością kosmiczną nazywamy **najmniejszą** możliwą prędkość jaką musi mieć punkt materialny przy powierzchni Ziemi (lub innego ciała niebieskiego), aby mógł oddalić się od niej w nieskończoność; prędkość tę nazywamy również prędkością ucieczki.

$$E_{cal}(R_z) = E_{cal}(\infty)$$
$$\frac{1}{2}mv_{II}^2 - G \frac{Mm}{R_z} = 0$$

Dla Ziemi:

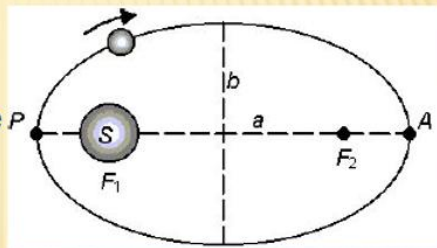
$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_z}{R_z}} = \sqrt{2}v_I \cong 11,2 \text{ km/s}$$



PRAWA KEPLERA

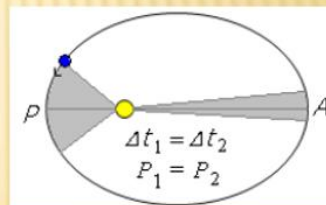
- Pierwsze prawo Keplera:**

Każda planeta krąży po orbicie eliptycznej, ze Słońcem w jednym z ognisk tej elipsy.



- Drugie prawo Keplera (prawo równych pól):**

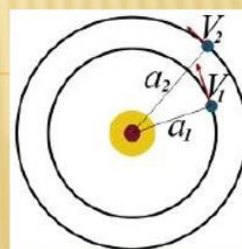
Linia łącząca Słońce i planetę zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.



- Trzecie prawo Keplera:**

Sześciiany półosi wielkich orbit jakichkolwiek dwóch planet mają się tak do siebie, jak kwadraty ich okresów obiegu:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$



Obliczmy całkowitą energię mechaniczną satelity o masie m krążącego swobodnie wokół ciała o masie M

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$F_{doś} = F_g$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad \frac{mv^2}{1} = G \frac{Mm}{r}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = G \frac{Mm}{2r}$$

$$E_{cał} = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r} = G \frac{Mm}{2r} - G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{2r} < 0$$

Czyli orbita jest zamknięta (eliptyczna)

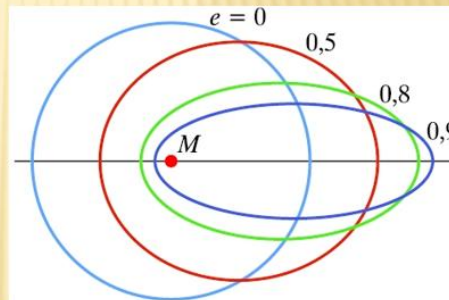
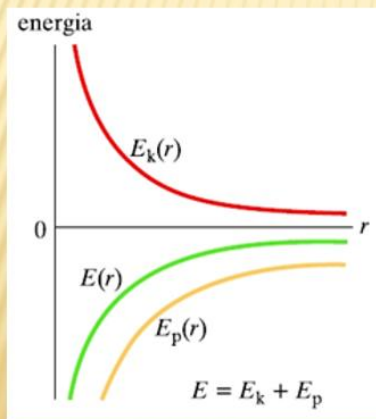
Dla $E_{cał} \geq 0$ trajektoria byłaby linią otwartą czyli ciało o masie m przelatujące obok masy M poruszałoby się po paraboli ($E_{cał} = 0$) lub po hiperboli ($E_{cał} > 0$) i oddaliłoby się w nieskończoność.

Dla ruchu po orbicie zamkniętej

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad E_k = \frac{mv^2}{2} = G \frac{Mm}{2r}$$

$$E_{cal} = E_k + E_p = -G \frac{Mm}{2r} < 0$$

Mimośród orbity Ziemi: $e_z = 0.017$



Rys. 14.17. Cztery orbity wokół ciała o masie M . Wszystkie te orbity mają taką samą półoś wielką a , a zatem odpowiada im taka sama całkowita energia mechaniczna satelity E . Przy każdej orbicie podano jej mimośród

Trzecie prawo Keplera (wyprowadzenie dla orbity kołowej)

$$F_{doś} = F_g$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

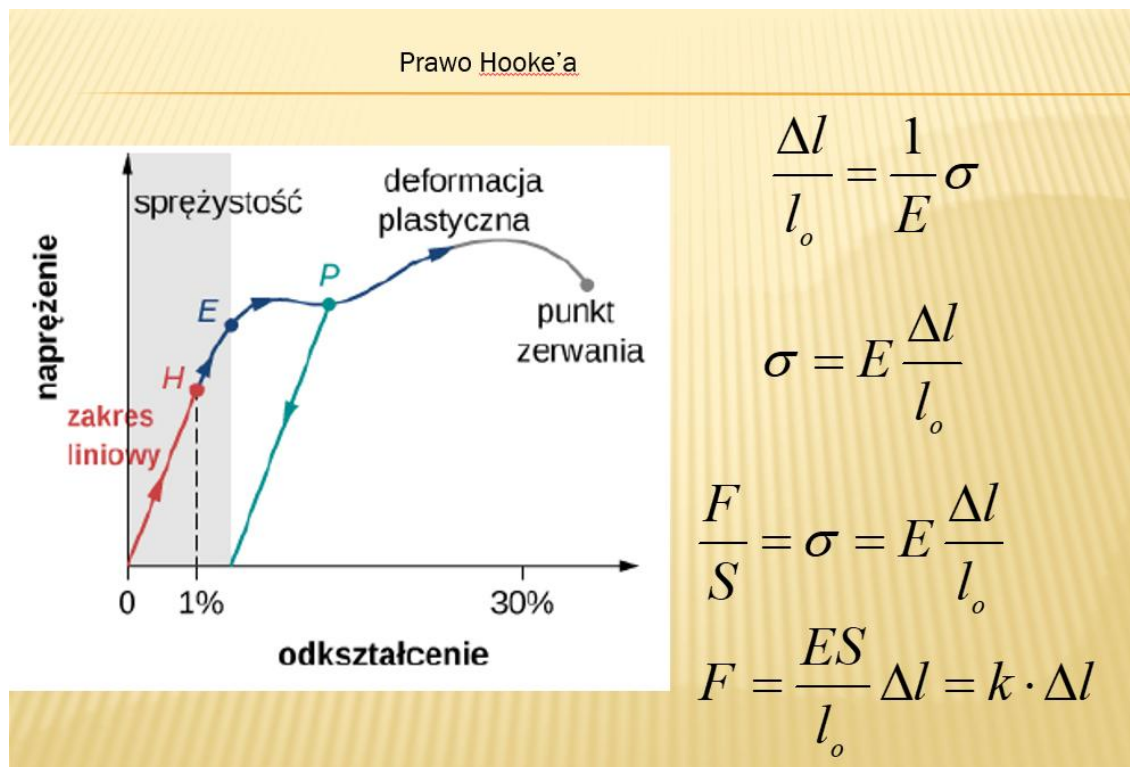
$$\text{ale } v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\frac{m \left(\frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{const}$$

Czyli $r^3/T^2 = \text{const}$, ale jest to stała jedynie w obrębie danego układu planetarnego bo zależy o masy centralnej gwiazdy M . W innym układzie planetarnym będzie inna stała.

Drgania (oscylacje)



Drganie okresowe:

$$x(t) = x(t + T)$$

Szczególnie ważnym ruchem drgającym jest tzw. **drganie harmoniczne**. Zapisuje się je równaniem:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

A – amplituda drgań

ω – częstość kątowna (pulsacja)

$\omega t + \varphi$ – faza drgań

φ – faza początkowa tj. faza dla $t=0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Równie dobrze można byoby zastosować funkcję sinus.

Prędkość i przyspieszenie

Prędkość i przyspieszenie uzyskamy licząc pochodną położenia:

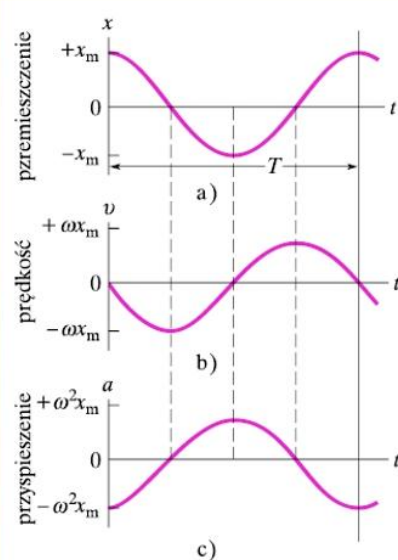
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Porównując $a(t)$ z $x(t)$ mamy:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$



Rys. 16.4. a) Przemieszczenie $x(t)$ ciała wykonującego drgania harmoniczne z fazą początkową ϕ równą zero. Jeden pełny cykl drgań wykonywany jest w ciągu okresu T . b) Prędkość ciała $v(t)$. c) Przyspieszenie ciała $a(t)$

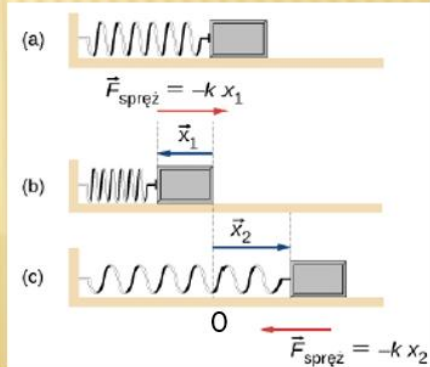
$$a(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

$$m \cdot a(t) = -m \cdot \omega^2 \cdot x(t)$$

$$\vec{F}(t) = -k \cdot \vec{x}(t) \quad \begin{array}{l} \text{Def.} \\ \text{Drgań harmoniczych} \end{array}$$

Siłę proporcjonalną do wychylenia i przeciwnie do niego zwróconą nazywamy **siłą sprężystości**.

k – współczynnik sprężystości



DRGANIE SWOBODNE

Drganie punktu materialnego o masie m pod działaniem **siły sprężystości** $F_s = -kx$ nazywamy **drganiami swobodnymi**.

$$\vec{F}_s(t) = -k \cdot \vec{x}(t)$$

$$\vec{F}_s(t) = m\vec{a}$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

różniczkowe równanie drgań swobodnych punktu materialnego.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$$

Rozwiązaniem tego równania drgań swobodnych jest:

$$x(t) = A \cos(\omega_o t + \varphi)$$

gdzie: $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Zatem drgania swobodne są drganiami harmonicznymi.

Energia potencjalna sprężystości

$$E_{p,A} = W_{A \rightarrow O} = \int_A^O \vec{F}_{sp} \cdot d\vec{s} =$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

Całkowita energia mechaniczna drgającego harmonicznie punktu materialnego :

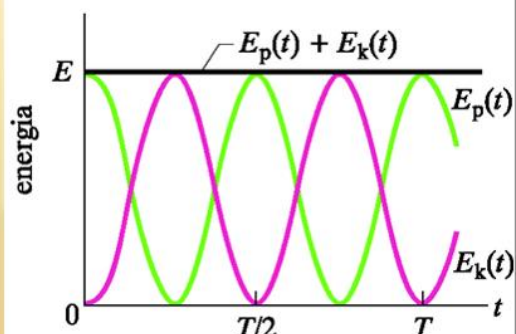
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

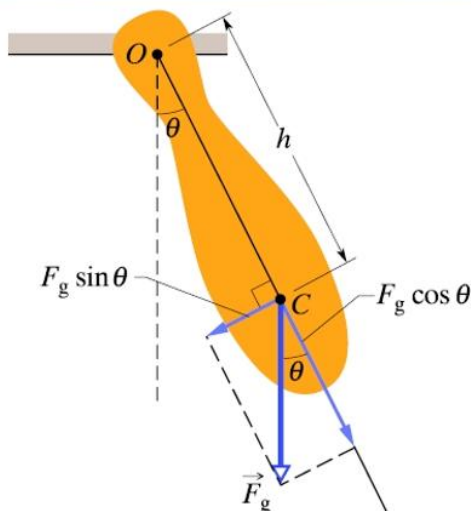
$$E_{cal} = E_k + E_p = \frac{1}{2}A^2[m\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + k \cos^2(\omega t + \varphi)] =$$

$$= \frac{1}{2}A^2k[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}A^2k \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m\omega^2 = k$$

Czyli nie występują straty energii



WAHADŁO FIZYCZNE



Rys. 16.10. Wahadło fizyczne. Przywracający równowagę moment siły wynosi $hF_g \sin \theta$. Gdy $\theta = 0$, środek masy C znajduje się bezpośrednio pod punktem zawieszenia wahadła O

$$M = -h \cdot (F_g \sin \theta)$$

Z II zas. dyn. Newtona:

$$M = I \cdot \varepsilon = I \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

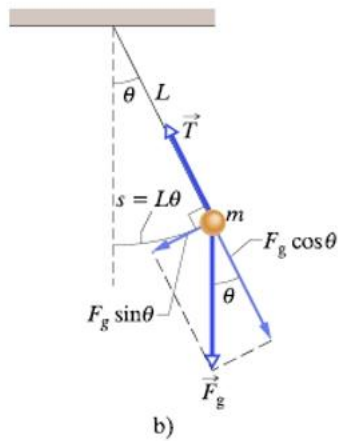
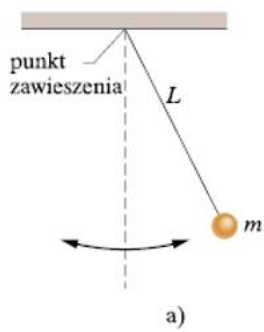
Więc dla małych kątów θ , gdy $\sin \theta \approx \theta$, mamy:

$$I \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -h \cdot mg \cdot \sin \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I} \cdot \theta = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_o^2 \cdot \theta = 0$$

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_o = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$



Rys. 16.9. a) Wahadło matematyczne.
b) Na ciężarek działają siła ciężkości $\vec{F}_g$ i naprężenie linki $\vec{T}$. Składowa styczna siły ciężkości $F_g \sin \theta$ powoduje powrót wahadła do położenia równowagi

WAHADŁO MATEMATYCZNE

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Ale $h=L$ oraz:

$$I = mL^2$$

Więc:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Drgań tłumionych i wymuszonych nie będzie na egzaminie

Drgania tłumione

Jeżeli drgania ciała odbywają się w ośrodku materialnym (gaz, ciecz), to wskutek występowania siły oporu ośrodka, którą nazywamy **siłą tłumiącą**, drgania będą znikać. W pewnym zakresie prędkości ciała siła tłumiąca jest wprost proporcjonalna do prędkości ciała więc można siłę tłumiącą wyrazić wzorem:

$$F_t = -b \frac{dx}{dt} \quad b - \text{wsp. oporu ośrodka}$$

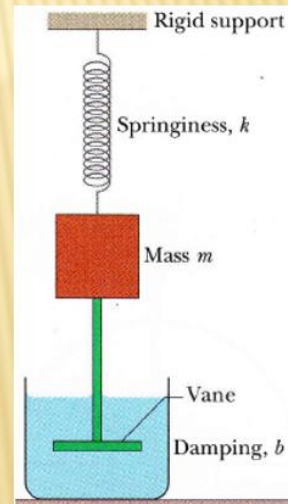
Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona mamy:

$$ma = F_{\text{wyp}} = F_s + F_t$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Jest to różniczkowe równanie drgań tłumionych punktu materialnego.



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

rów. liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych wsp.

Są trzy klasy rozwiązań tego równania :

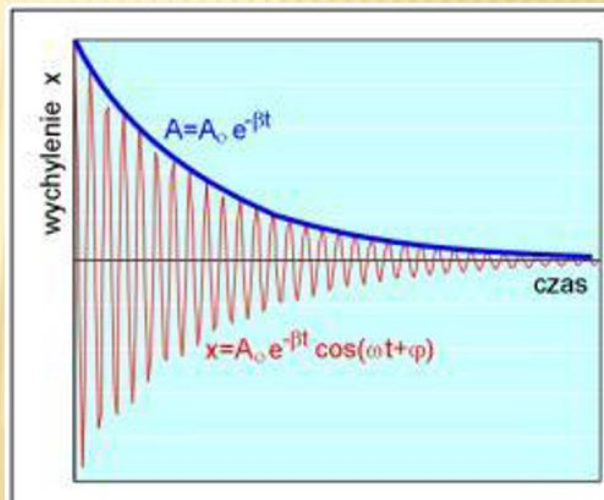
$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \beta - \text{wsp. tłumienia ośr.}$$

ω_o – częstość drgań nietłumionych

1) Małe tłumienia tzn. $\beta < \omega_o$

$$x(t) = A_o e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$



Małe tłumienia ($\beta < \omega_o$) - cd

$$x(t) = A_o e^{-\beta \cdot t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Dekrement tłumienia to
logarytm naturalny stosunku
amplitud w chwilach **t** i **$t+T$** :

$$\Lambda = \ln \frac{A_o e^{-\beta \cdot t}}{A_o e^{-\beta \cdot (t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

2) Duże tłumienia tzn. $\beta > \omega_0$

W tym przypadku rozwiązaniem równania jest **ruch pelzający** (aperiodyczny) o równaniu:

$$x(t) = B_1 e^{-(\beta+\omega)t} + B_2 e^{-(\beta-\omega)t}$$

$$\omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

B_1 i B_2 – stałe

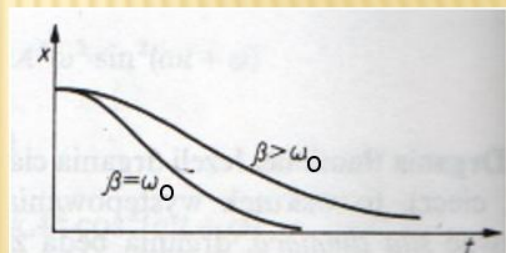
ω_0 – częstość drgań nietłumionych (swobodnych)

3) $\beta = \omega_0$ ruchem pelzający krytyczny

$$x(t) = A_0 (1 + \alpha \cdot t) e^{-\beta \cdot t}$$

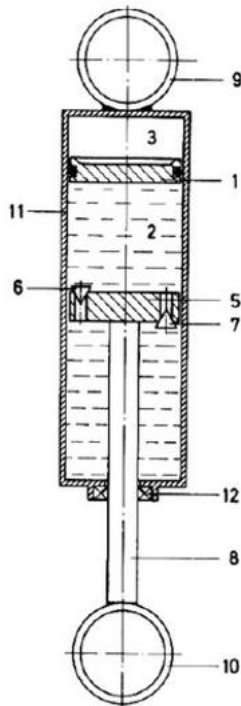
A_0, α – stałe

Ruch pelzający krytyczny jest wykorzystywany w amortyzatorach pojazdów mechanicznych.



Rys. 2.4. Ruch pelzający ($\beta > \omega$) i ruch pelzający krytyczny ($\beta = \omega$); w obu przypadkach ciało zbliża się asymptotycznie do położenia równowagi





Amortyzator jednorurowy wysokociśnieniowy
(olejowo-gazowy)

Koniec drgań wymuszonych

Składanie drgań

Składanie drgań harmonicznych równoległych o tej samej częstotliwości.

Założmy, że dwa drgania o tej samej pulsacji zachodzą wzdłuż osi x:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

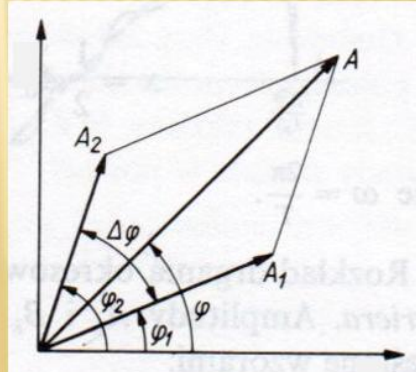
Drganie wypadkowe rozważanego punktu jest sumą jego wychyleń składowych:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

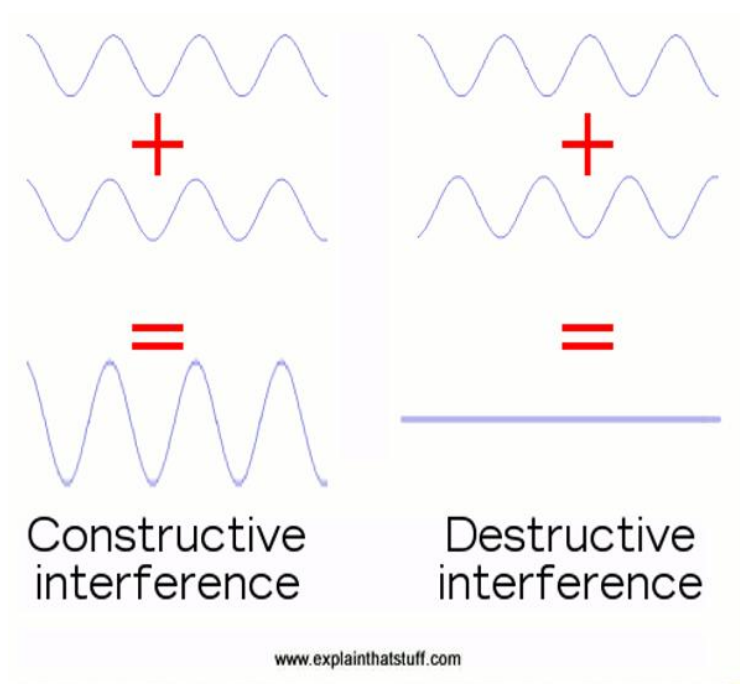
wypadkowe drganie
jest też harmoniczne z cz. ω !!!

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



cd.:



Gdy:

1. Zgodne fazy tzn. $\Delta\varphi=0$
interferencja konstruktywna

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2}$$

$$= \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$$

2. Przesunięte fazy o $\Delta\varphi=\pi$
interferencja destruktywna

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2}$$

$$= \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = |A_1 - A_2|$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(180^\circ - \Delta\varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi)}$$

Dudnienia

Przy nałożeniu się drgań harmoniczných o niewiele różniących się częstościach (pulsacjach) powstaje drganie złożone, które nazywamy dudnieniem.

Dla uproszczenia założmy, że drgania składowe mają jednakowe amplitudy:

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t) = A \cos(\omega - \Delta\omega)t$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t) = A \cos(\omega + \Delta\omega)t$$

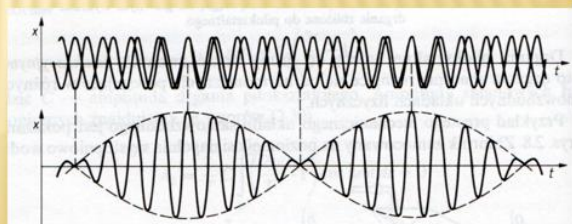
Drganie wypadkowe wyraża się wzorem:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t + A \cos(\omega - \Delta\omega)t =$$

$$2A \cos \Delta\omega t \cdot \cos \omega t = A'(t) \cdot \cos \omega t$$

Zastosowano:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$



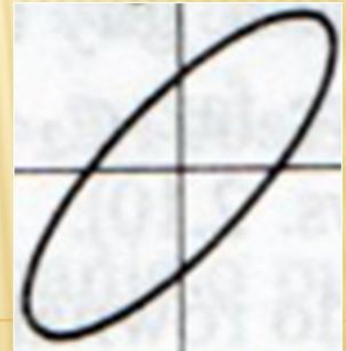
Rys. 2.9. Nałożenie się drgań harmoniczných o zbliżonych pulsacjach (wykres górny) daje w wyniku dudnienie (wykres dolny)

SKŁADANIE PROSTOPADŁYCH DRGAŃ HARMONICZNYCH

- Załóżmy, że punkt materialny uczestniczy jednocześnie w dwóch drganiach harmonicznym, odbywających się z jednakowymi częstotliwościami ω w dwóch kierunkach wzajemnie prostopadłych:

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x)$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y)$$



$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

SKŁADANIE PROSTOPADŁYCH DRGAŃ HARMONICZNYCH

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x) \quad y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y)$$

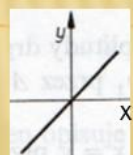
1) Początkowe fazy obu drgań są jednakowe:

$$\varphi_x = \varphi_y$$

Dzieląc stronami:

$$y(x) = \frac{A_y}{A_x} x$$

- linia prosta



SKŁADANIE PROSTOPADŁYCH DRGAŃ HARMONICZNYCH

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x) \quad y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y)$$

2) Początkowa różnica faz obu drgań jest równa π :

$$\varphi_x - \varphi_y = \pi$$

Dzieląc stronami: $y(x) = -\frac{A_y}{A_x}x$ - linia prosta



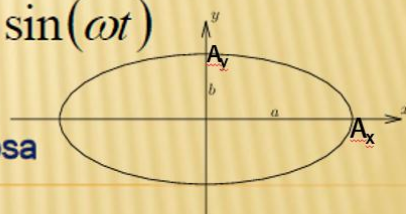
SKŁADANIE PROSTOPADŁYCH DRGAŃ HARMONICZNYCH

$$x(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi_x) \quad y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y)$$

3) Początkowa różnica faz obu drgań jest równa $\pi/2$:

Wtedy: $x(t) = A_x \cos(\omega t) \quad y(t) = A_y \sin(\omega t)$

I ostatecznie: $\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$ - elipsa



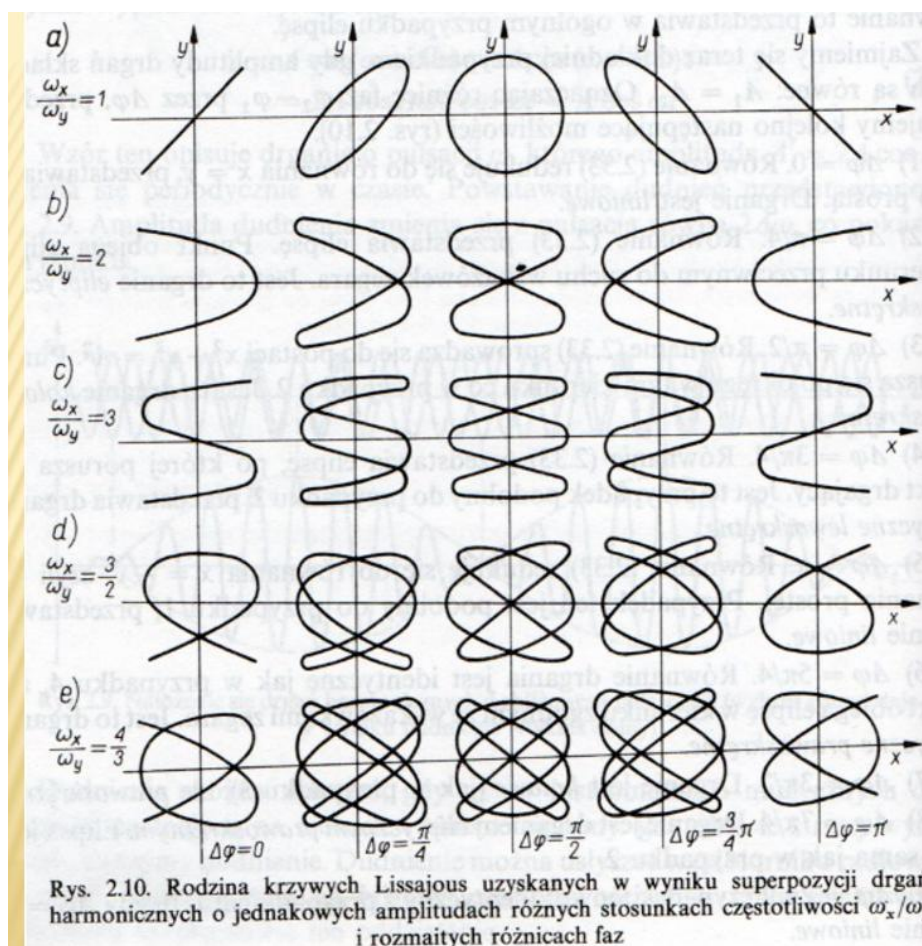
Punkt porusza się po tej elipsie przeciwnie do ruchu wskazówek zegara;

SKŁADANIE PROSTOPADŁYCH DRGAŃ HARMONICZNYCH

- Inne różnice faz

- również elipsy, ale o osiach nie pokrywających się z osiami układu współrzędnych.

- W przypadku ogólnym – dowolne częstości, amplitudy, fazy – mamy do czynienia z tzw. **figurami Lissajous**.



Figury Lissajous

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{n_y}{n_x}$$

FALE

Prawie wszystkie informacje o otaczającym nas świecie człowiek uzyskuje za pośrednictwem fal: **światła i dźwięku**.



Fale mechaniczne - fale rozchodzące się w ośrodkach sprężystych.

Powstają one w wyniku wychyleń (zaburzeń) jakiegoś fragmentu ośrodka sprężystego z jego normalnego położenia tzn. położenia równowagi, co powoduje powstanie drgań wokół tego położenia. Dzięki sprężystym właściwościom ośrodka drgania te są przekazywane kolejno do coraz dalszych jego części i w ten sposób zaburzenie przechodzi przez cały ośrodek. Zatem :

Ruchem falowym (falą) nazywamy przenoszenie się zaburzenia w ośrodku.

Oczywiście sam ośrodek nie przemieszcza się jako całość, jedynie różne jego części drgają w ograniczonych obszarach przestrzeni. (przykład z falą na powierzchni wody)

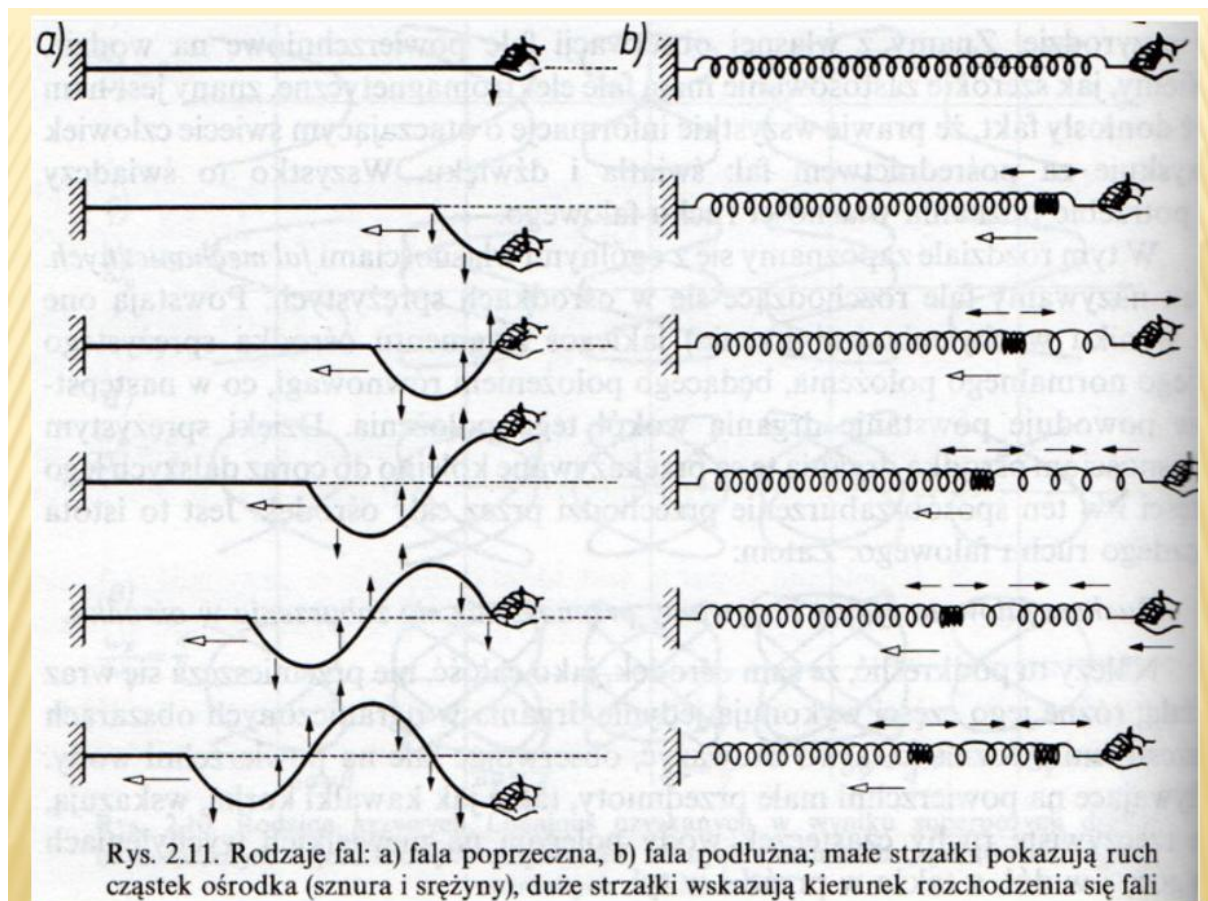
Drgania ośrodka, związane z rozchodzeniem się fali mają pewną energię. Energia ta dostarczana przez źródło drgań jest przenoszona w ośrodku przez falę. Zjawisko przenoszenia energii bez przenoszenia materii nazywamy transportem energii.

Rodzaje fal

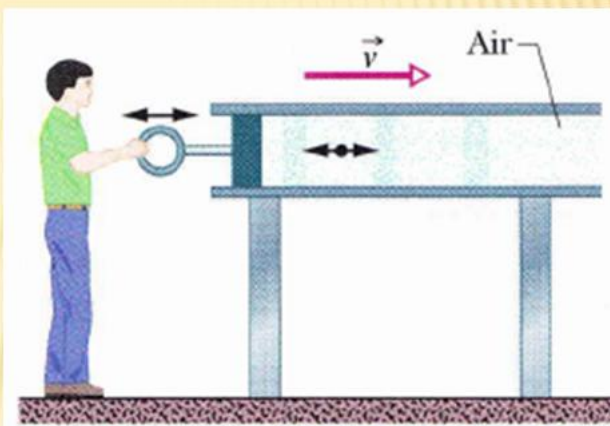
Ogólnie rozróżniamy fale **podłużne** i **poprzeczne**.

Fala jest **podłużna** jeżeli kierunek drgań cząstek ośrodka jest równoległy do kierunku rozchodzenia się fali.

Fala jest **poprzeczna** jeżeli kierunek drgań cząstek ośrodka jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali.

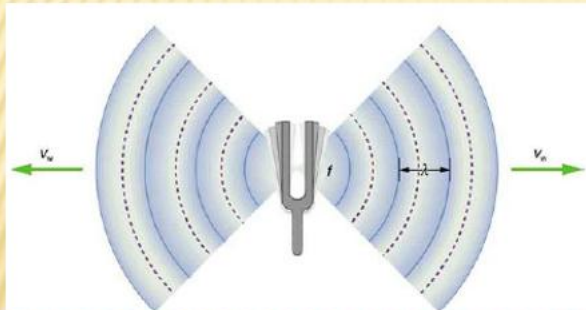


W gazach i w cieczech (zdaleń od powierzchni) rozchodzą się tylko fale podłużne (bo te ośrodki mają sprężystość objętości lecz nie mają sprężystości postaci:

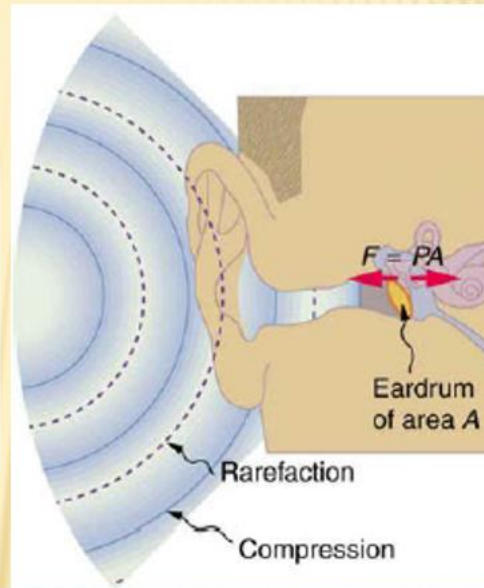


Sprężyste ciała stałe mogą przenosić zarówno fale podłużne jak i poprzeczne.

słyszenie



kamerton



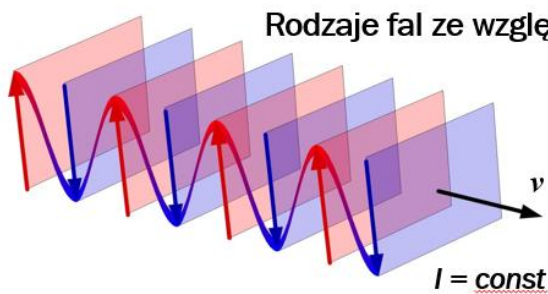
Płyny (gazy i ciecze) mają tylko sprężystość objętości (brak sprężystości postaci) więc przenoszą tylko fale podłużne.

Rodzaje fal - cd

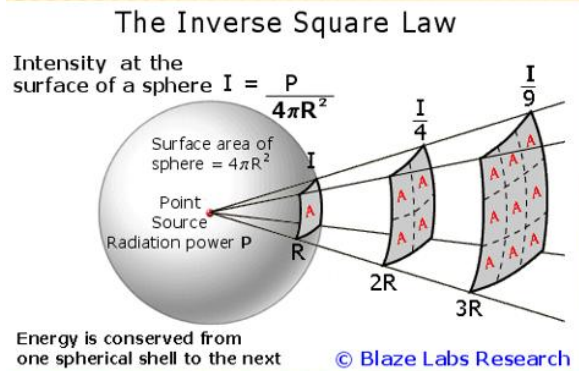
Powierzchniami falowymi nazywamy powierzchnie utworzone przez punkty ośrodka, w których w danej chwili zaburzenia są jednakowe (jednakowe fazy)

Czołem fali nazywamy powierzchnię falową łączącą wszystkie punkty ośrodka o jednakowych fazach, do których dochodzi w danej chwili fala.

Ze względu na kształt powierzchni falowej fali/ czoła fali można wyróżnić np. fale: płaskie, kuliste czy koliste.



Fala płaska ma stałą częstotliwość i amplitudę. Powierzchnie falowe są nieskończonymi płaszczyznami prostopadłymi do kierunku propagacji. (1D)



Fala sferyczna. (3D)

$$I \sim \frac{1}{R^2}$$

Fala kolista (2D)



$$I = \frac{P}{2\pi R}$$

Fala harmoniczna płaska

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

A – amplituda fali

ω – częstość kołowa

t – czas

k – wektor falowy

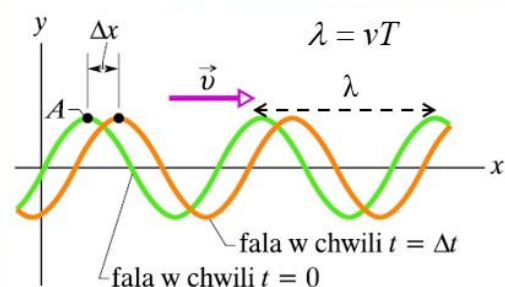
φ_0 – faza początkowa

x – kierunek rozchodzenia się fali.

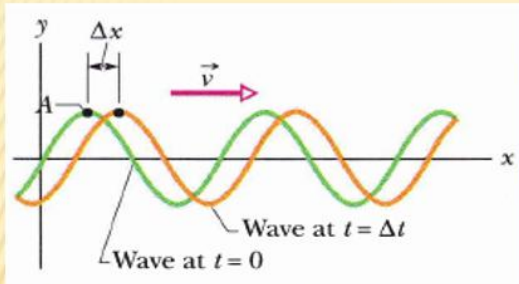
Fala rozchodzi się w **dodatnim** kierunku osi X

Długością fali nazywamy odległość dwóch punktów fali o fazach różniących się o 2π , czyli:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$



Rys. 17.7. Dwa zdjęcia migawkowe fali z rysunku 17.5 wykonane w chwilach $t = 0$ i $t = \Delta t$. Ponieważ fala porusza się w prawo z prędkością $\vec{v}$, cała krzywa przesuwa się na odległość Δx w czasie Δt . Punkt odpowiadający maksimum „podróżuje” razem z falą, ale element liny porusza się tylko w górę i w dół



Prędkość fazowa fali

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_o)$$

$$\omega t - kx + \varphi_o = \text{const} \quad x = \frac{\omega t + \varphi_o - \text{const}}{k}$$

$$v_{\text{wave}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda = \frac{\lambda}{T}$$

Fala stojąca

$$y^+(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$y^-(x, t) = A \sin(\omega t + kx + \pi)$$

$$y(x, t) = y^+ + y^- = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t + kx) = -2A \sin kx \cos \omega t$$

Strzałki:

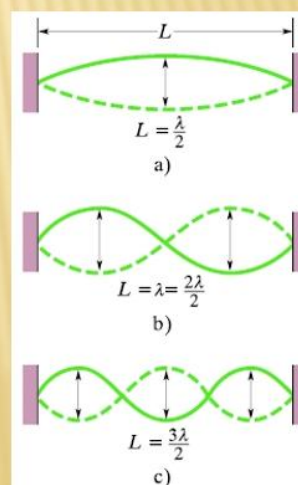
$$\sin kx = \pm 1 \quad kx = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad x = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

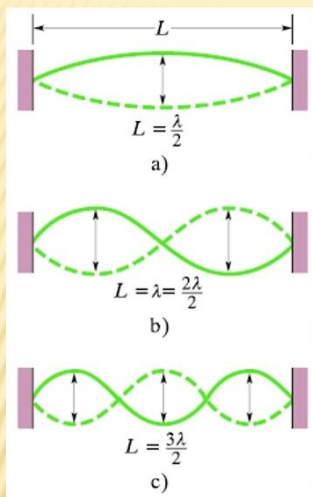
Węzły:

$$\sin kx = 0 \quad kx = 0 + n\pi \quad \frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi \quad x = n \frac{\lambda}{2}$$

Czy fala stojąca przenosi energię?

W którą stronę? Odp.: NIE





$$\lambda = vT = v / f$$

$$f_1 = \frac{v_{fali}}{\lambda_1} = \frac{v_{fali}}{2L} = 1 \cdot \frac{v_{fali}}{2L}$$

ton podstawowy -
pierwsza harmoniczna

$$f_2 = \frac{v_{fali}}{\lambda_2} = \frac{v_{fali}}{L} = 2 \frac{v_{fali}}{2L} = 2 \cdot f_1$$

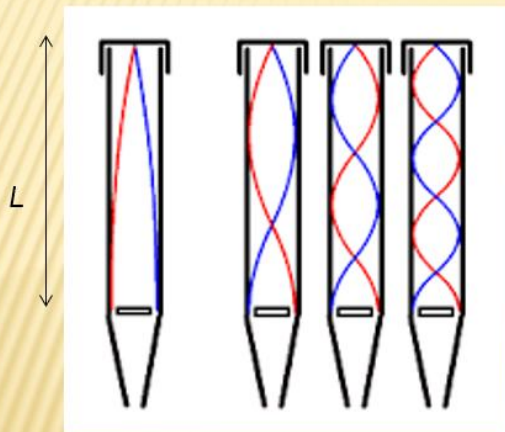
druga harmoniczna

$$f_3 = \frac{v_{fali}}{\lambda_3} = \frac{v_{fali}}{\frac{2}{3}L} = 3 \frac{v_{fali}}{2L} = 3 \cdot f_1$$

trzecia harmoniczna

$$f_n = \frac{v_{fali}}{\lambda_n} = n \cdot f_1$$

Prędkość fali jest prędkością w materiale, z którego zrobiona jest struna.



16.15 Organ pipes of different sizes produce tones with different frequencies.



Jaka jest długość fali wyrażona w L?

$$L = \frac{1}{4} \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4L$$

$$f_1 = \frac{v_{fali}}{\lambda_1} = \frac{v_{fali}}{4L} = 1 \cdot \frac{v_{fali}}{4L}$$

$$f_n = \frac{v_{fali}}{\lambda_n} = \frac{v_{fali}}{4L} = (2n + 1) \cdot \frac{v_{fali}}{4L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tutaj prędkość fali jest prędkością w powietrzu wypełniającym piszczalkę.

Prędkości dźwięku w różnych ośrodkach wyrażają się wzorami:

w ciele stałym

$$v_{//} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

dla **fali podłużnej**

E - moduł Younga

ρ - gęstość ciała

$$\frac{\Delta l}{l_o} = \frac{1}{E} \sigma$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

dla **fali poprzecznej**

G - moduł sztywności

$$\alpha = \frac{1}{G} \tau$$

w cieczy
i w gazie

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

dla **fali podłużnej**,

K - moduł ścisłości
cieczy

$$-\frac{\Delta V}{V_o} = \frac{1}{K} \sigma$$

w gazie

$$v = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}}$$

dla **fali podłużnej**,

p - ciśnienie gazu

$$\chi = \frac{c_p}{c_v}$$

Ze wzorów tych wynika, że prędkość dźwięku nie zależy od częstotliwości dźwięku. Jest to słuszne jeżeli amplituda drgań nie jest zbyt duża.

$$const = v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

więc:

f↑



λ↓

Table 16.1 Speed of Sound in Various Bulk Materials

Material	Speed of Sound (m/s)
<i>Gases</i>	
Air (20°C)	344
Helium (20°C)	999
Hydrogen (20°C)	1330
<i>Liquids</i>	
Liquid helium (4 K)	211
Mercury (20°C)	1451
Water (0°C)	1402
Water (20°C)	1482
Water (100°C)	1543
<i>Solids</i>	
Aluminum	6420
Lead	1960
Steel	5941

Prędkość dźwięku w powietrzu zależy od jego temperatury, ponieważ wraz z temperaturą zmienia się gęstość powietrza. Zależność tę można wyrazić wzorem:

$$v = v_o \sqrt{\frac{T}{T_o}}$$

Dźwięki

Dźwięki to słyszalne fale mechaniczne w ośrodkach sprężystych (w gazach, cieczach i ciałach stałych).

Ucho ludzkie jest czułe na dźwięki z zakresu słyszalności od ok. 20 do ok. 20 000 Hz, ,
Fale mechaniczne o niższej częstotliwości to infradźwięki a o wyższej częstotliwości to ultradźwięki.

Dźwięki charakteryzujemy **wysokością, barwą i natężeniem**.
 Wysokość rośnie ze wzrostem częstotliwości tonu podstawowego.
 Barwa dźwięku jest związana z zawartością w fali dźwiękowej wielu drgań o różnych przebiegach i częstotliwościach. Natężenie dźwięku rośnie ze wzrostem amplitudy fali dźwiękowej.

Natężeniem fali nazywamy moc fali przypadającą na jednostkę powierzchni prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali:

$$I = \frac{dE}{dt} \frac{1}{S} = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 A^2 \quad \left[\frac{J}{s \cdot m^2} \right]$$

v – prędkość fali
 ρ – gęstość ośrodka
 ω – częstość
 A – amplituda fali

Natężenie najśłabszego słyszalnego dźwięku wynosi $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, a najsilniejszego (ale bezpiecznego dla uszu) $I_{\text{max}} = 1 \text{ W/m}^2$. Wobec tak szerokich granic natężeń dźwięku, wprowadzono poziom natężenia dźwięku L w którym natężenie I_0 przyjęto za natężenie odniesienia i wszystkie inne wartości natężenia I porównuje się z I_0 w skali logarytmicznej jak poniżej:

Poziomem natężenia dźwięku (głosu) nazywamy wielkość:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad [dB]$$

Więc, że najśłabszy dźwięk ma 0dB, a najsilniejszy 120dB.

Poziom natężenia dźwięku - przykłady

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad [\text{dB}]$$

I - natężenie dźwięku

I_0 - natężenie odniesienia (próg słyszalności): $I_0 = 10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$

$$I_{\text{max}} = 1 \text{ W} / \text{m}^2$$

10 dB - szelest liści przy łagodnym wietrze

20 dB - szept

60 dB - odkurzacz

70 dB - wnętrze głośnej restauracji, wnętrze samochodu

90 dB - ruch uliczny

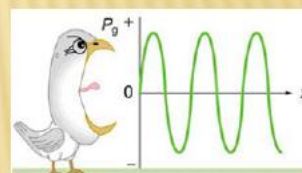
100 dB - motocykl bez tłumika

140 dB - start myśliwca

160 dB - eksplozja petardy $I = 10^4 \text{ W} / \text{m}^2$

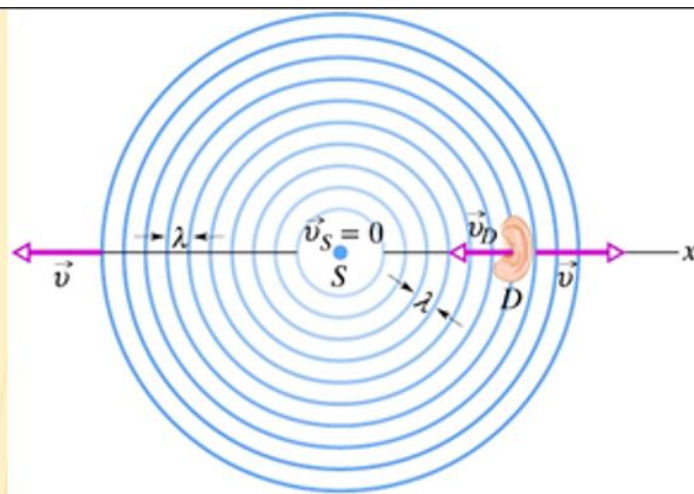
220 dB - eksplozja bomby atomowej

300–350 dB (huk był słyszalny z odległości 3200 kilometrów) – wybuch wulkanu Krakatau w Indonezji (1883r.) – prawdopodobnie najgłośniejszy w historii wyemitowany i udokumentowany dźwięk na Ziemi.



Efekt Dopplera

Źródło dźwięku jest nieruchome,
detektor się porusza



$$\lambda = v_f \cdot T$$

$$f = \frac{v_f}{\lambda}$$

v_f – prędkość fali

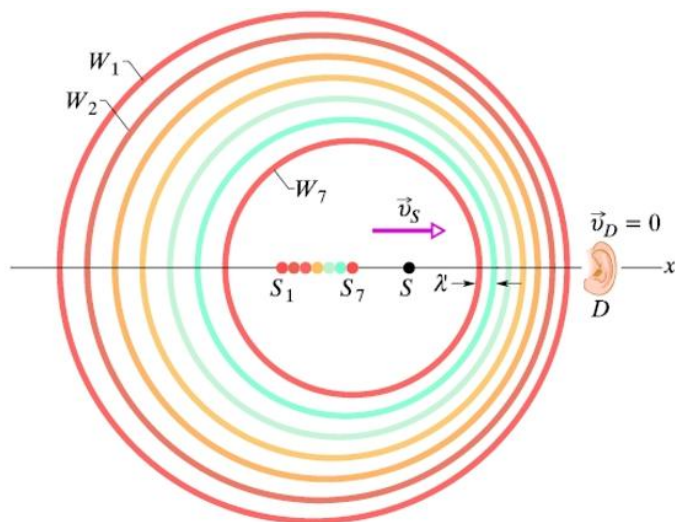
Detektor **zbliża** się do
nieruchomego źródła

$$f' = \frac{v_f + v_D}{\lambda} = \frac{v_f + v_D}{v_f / f} = \frac{v_f + v_D}{v_f} f = \left(1 + \frac{v_D}{v_f} \right) \cdot f$$

Detektor **oddala** się od
nieruchomego źródła

$$f' = \frac{v_f - v_D}{\lambda} = \frac{v_f - v_D}{v_f / f} = \frac{v_f - v_D}{v_f} f = \left(1 - \frac{v_D}{v_f} \right) \cdot f$$

$$f' = \left(1 \pm \frac{v_D}{v_f} \right) \cdot f$$



Rys. 18.20. Detektor D jest nieruchomy, a źródło S porusza się w jego kierunku z prędkością v_s . Czoło fali W_1 odpowiada chwili, gdy źródło znajdowało się w punkcie S_1 , a czoło fali W_7 — chwili, gdy źródło było w punkcie S_7 . W chwili przedstawionej na rysunku źródło znajduje się w punkcie S . Detektor odbiera większą częstotliwość, gdyż poruszające się źródło, goniąc wysyłane przez siebie fale, wysyła w kierunku swojego ruchu fale o mniejszej długości fali λ'

Źródło dźwięku porusza się,
detektor jest nieruchomy

$$f = \frac{v_f}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{v_f}{\lambda''} = \frac{v_f}{\lambda - v_z \cdot T} = \\ &= \frac{v_f}{\lambda - v_z / f} = \frac{v_f}{\lambda f - v_z} f = \\ &= \frac{v_f}{v_f - v_z} f = \frac{1}{1 - \frac{v_z}{v_f}} f \end{aligned}$$

$$f'' = \frac{1}{1 \pm \frac{v_z}{v_f}} f$$

Jeżeli źródło i detektor są w ruchu to należy
złożyć te dwa wzory :

$$f'' = \left(1 \pm \frac{v_D}{v_f} \right) \cdot f'$$

$$f' = \frac{1}{1 \pm \frac{v_z}{v_f}} f$$

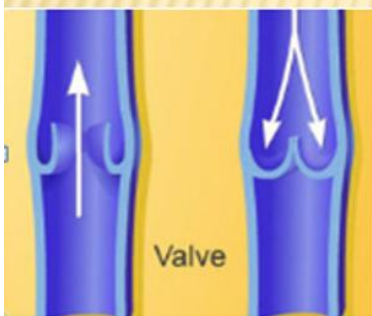
$$f'' = \frac{1}{1 \pm \frac{v_z}{v_f}} \left(1 \pm \frac{v_D}{v_f} \right) \cdot f = \frac{1 \pm \frac{v_D}{v_f}}{1 \pm \frac{v_z}{v_f}} f$$



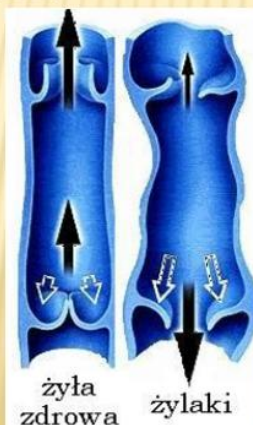
$$f'' = \frac{v_f \pm v_D}{v_f \pm v_z} f$$



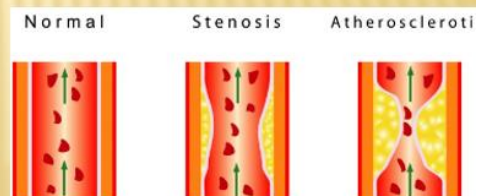
Zastosowanie efektu **Dopplera fal ultradźwiękowych** w medycynie do badania prawidłowości przepływu krwi w żyłach.



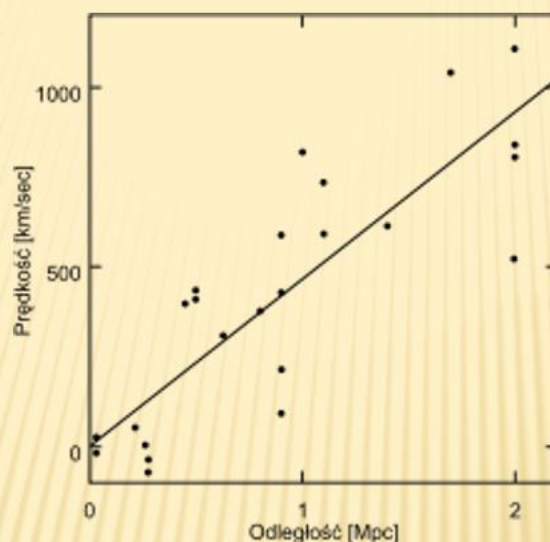
Zdrowa żyła



żylaki



złogi
Miażdżyca (arterioskleroza)



Pierwotny wykres Hubble'a

$$v = H_o \cdot r$$

Przesunięcie linii widmowych fal elektromagnetycznych emitowanych przez gwiazdy w kierunku niższych częstotliwości świadczy o rozszerzaniu się wszechświata; im dalej tym szybciej.

Grawitacja

Prawo powszechnego ciążenia

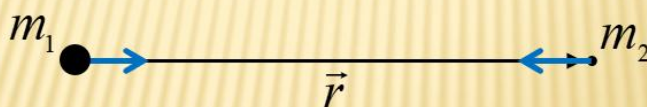
Prawo powszechnego ciążenia (prawo grawitacji) zostało sformułowane przez Newtona w 1687r. Wynika ono z obserwacji, głównie astronomicznych, oraz z eksperymentów przeprowadzonych na Ziemi.

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 przyciągają się wzajemnie siłą proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich odległości r :

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

G - stała grawitacyjna, $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$

Minus oznacza przyciąganie



$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

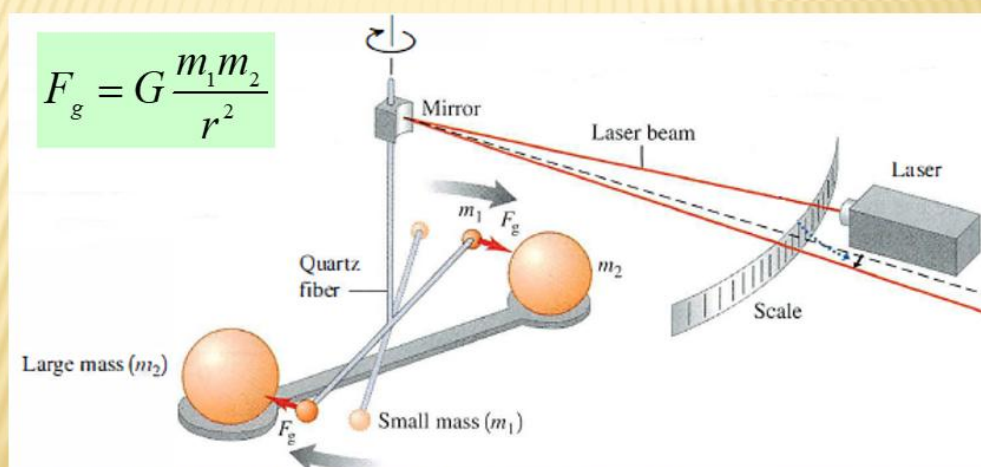
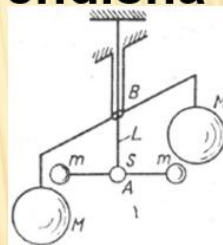
pytanie:

jeśli $m_1 > m_2$, to na którą masę działa większa siła grawitacji?

Odp.: Są równe

Doświadczenie Henry'ego Cavendisha

Stała grawitacji $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ po raz pierwszy została wyznaczona w 1797r przez Henry'ego Cavendisha przy użyciu wagi skręceń:



Uwspółcześniona wersja stanowiska doświadczalnego Cavendisha

Cavendish - cd

Znając stałą grawitacji Cavendish obliczył masę Ziemi:

Przy powierzchni Ziemi: $F_{gr} = mg$

Ogólniej przy powierzchni Ziemi: $F_{gr} = G \frac{M_z m}{R_z^2}$

$$G \frac{M_z m}{R_z^2} = mg$$

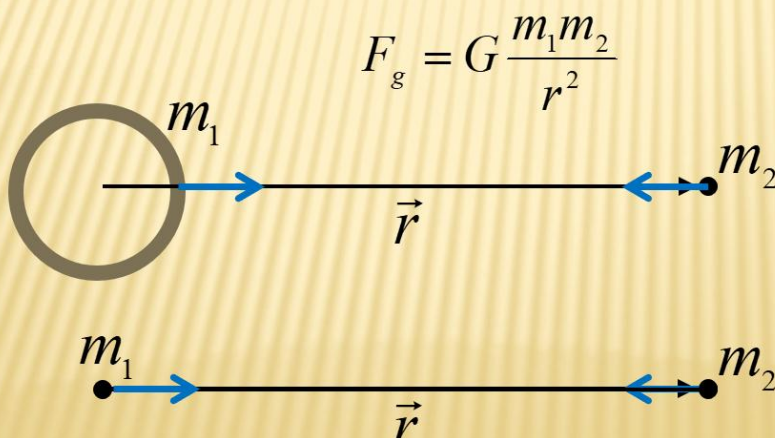
$$M_z = \frac{g R_z^2}{G}$$

Promień Ziemi znany był już w starożytności

W przypadku ciał rozciągniętych o skończonych rozmiarach traktujemy je jak układy punktów materialnych. Każdy punkt jednego ciała przyciąga każdy punkt drugiego ciała. Stosując rachunek całkowy można obliczyć siłę wypadkową przyciągania się rozważanych ciał.

Można jednak wykazać, że:

jednorodne ciała kuliste oraz ciała złożone z jednorodnych warstw kulistych przyciągają się tak, jak punkty materialne umieszczone w ich środkach.



Natężenie pola grawitacyjnego

Miarą ilościową pola grawitacyjnego jest jego **natężenie E_g** . Wartość natężenia pola grawitacyjnego jest równa liczbowo sile jaką to pole działa na punkt materialny o masie jednostkowej.

$$\vec{E}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

- **Zasada superpozycji pól** (nakładania się pól): przy nałożeniu się kilku pól (np. ciężenia), natężenie pola wypadkowego równa się sumie wektorowej natężeń wszystkich tych pól.

$$\vec{E}_g = \vec{E}_{g,1} + \vec{E}_{g,2} + \dots + \vec{E}_{g,n}$$

Ciężar ciała.

Siłę, jaką ciało materialne jest przyciągane przez Ziemię nazywamy ciężarem ciała. Ponieważ Ziemia w przybliżeniu jest kulą o jednorodnych warstwach to dla określenia ciężaru ciała można zastosować wzór w postaci:

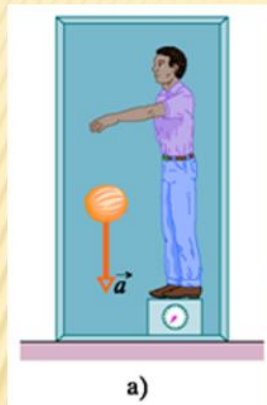
$$F_g = G \frac{M_z m}{R_z^2}$$

M_z - masa Ziemi,
 m - masa ciała,
 R_z - promień Ziemi.

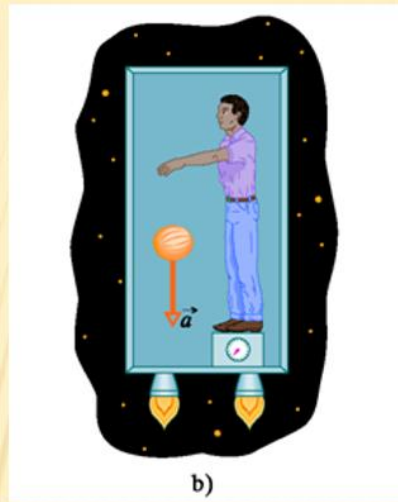
Przyspieszenie ziemskie:

$$a = \frac{F_g}{m} = G \frac{M_z}{R_z^2} = g = 9.81 m/s^2$$

Równoważność masy bezwładnościowej i masy grawitacyjnej



a)



b)

Rys. 14.19. a) Fizyk zamknięty w pojemniku spoczywającym na Ziemi serwuje melon spadający z przyspieszeniem $a = 9,8 \text{ m/s}^2$. b) Jeśli pojemnik porusza się daleko w przestrzeni kosmicznej z przyspieszeniem równym $9,8 \text{ m/s}^2$, to przyspieszenie melona względem fizyka jest takie samo jak na Ziemi. Fizyk nie może stwierdzić na podstawie żadnych doświadczeń wykonanych w pojemniku, w której z tych dwóch sytuacji się znajduje. Na przykład waga, na której fizyk stoi, ma w obu przypadkach takie same wskazania

Przypomnienie:

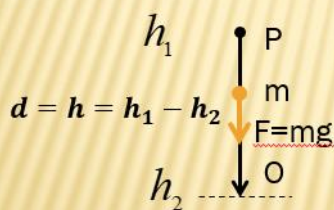
Energia potencjalna

- pola grawitacyjnego (blisko powierzchni Ziemi!!!!)

Energia potencjalna pola sił potencjalnych w punkcie P umieszczonego tam ciała o masie m jest równa pracy siły potencjalnej (zachowawczej) wykonanej przy przesunięciu tego ciała od punktu P do punktu odniesienia O.

$$E_p(\vec{r}_p) = W_{P \rightarrow O}$$

Obliczmy energię pola sił grawitacyjnych w pobliżu Ziemi ($a=g=\text{const.}$):



$$E_p(\vec{r}_p) = W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos \phi = mgh$$

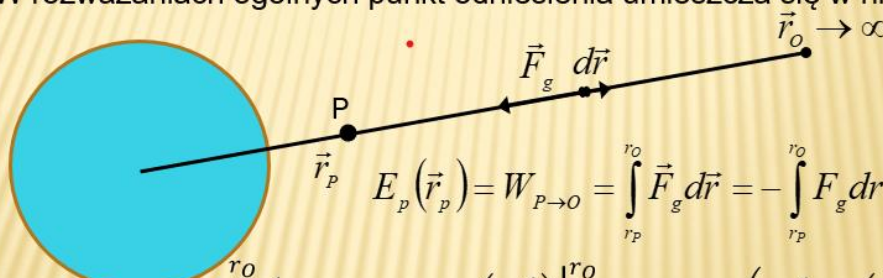
Energia potencjalna na zewnątrz planety

(wszędzie na zewnątrz czyli blisko i daleko od Ziemi)

Energia potencjalna w punkcie P jest to praca $W_{P \rightarrow O}$ siły potencjalnej (zachowawczej) wykonana przy przesunięciu masy próbnej m od tego punktu pola P do punktu odniesienia O

$$E_p(\vec{r}_p) = W_{P \rightarrow O}$$

W rozważaniach ogólnych punkt odniesienia umieszcza się w nieskończoności.

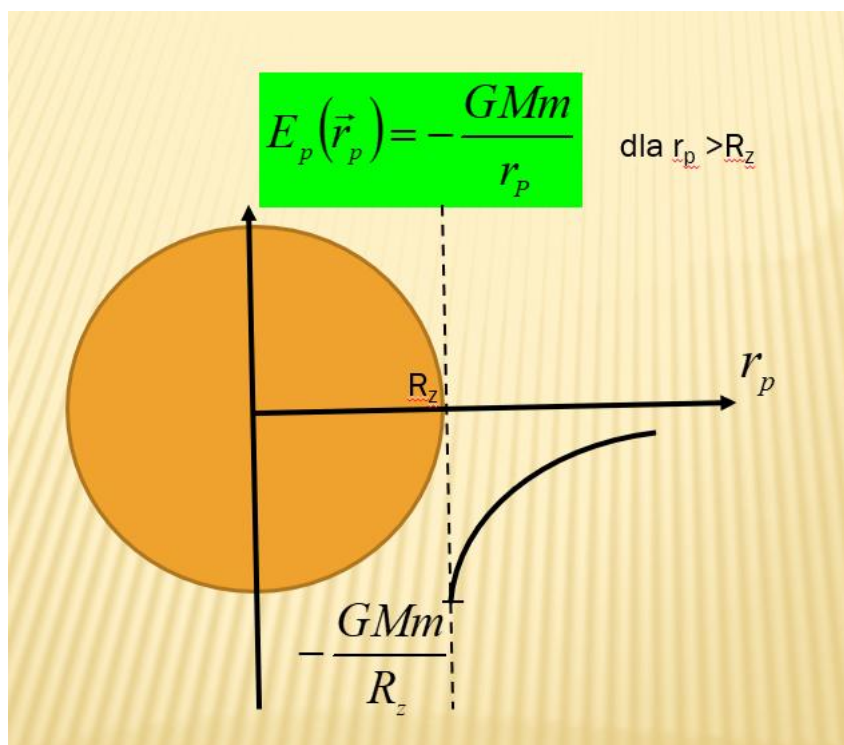


$$E_p(\vec{r}_p) = W_{P \rightarrow O} = \int_{r_p}^{r_o} \vec{F}_g d\vec{r} = - \int_{r_p}^{r_o} F_g dr = - \int_{r_p}^{r_o} G \frac{Mm}{r^2} dr =$$

$$= -GMm \int_{r_p}^{r_o} \frac{1}{r^2} dr = -GMm \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_p}^{r_o} = -GMm \left(-\frac{1}{r_o} - \left(-\frac{1}{r_p} \right) \right) = -\frac{GMm}{r_p}$$

$E_p(\vec{r}_p) = -\frac{GMm}{r_p}$

Uwaga: całkowanie nie obowiązuje na Studium Talent



Potencjał pola grawitacyjnego

- Pola charakteryzuje się również pewną wielkością skalarną, zwaną **potencjałem pola**. Równy jest on stosunkowi energii potencjalnej punktu materialnego do jego masy:

$$V \equiv \frac{E_p}{m}$$

W przypadku pola grawitacyjnego pojedynczego punktu materialnego o masie M potencjał tego pola wyraża się wzorem:

$$V_g = -\frac{G M}{r}$$



Dr hab. inż. Władysław Artur Woźniak

CIAŻENIE POWSZECHNE (GRAWITACJA)

- Pole grawitacyjne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli:

- pole grawitacyjne **na zewnątrz** pustej czaszy kulistej (bądź pełnej kuli) o masie M i promieniu R :

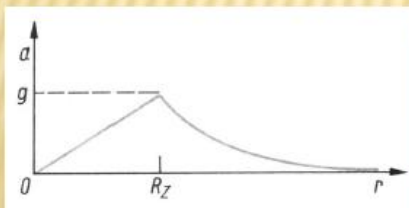
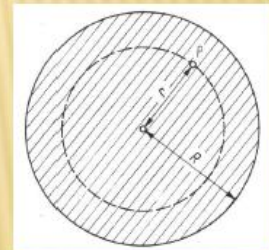
$$g = \frac{GM}{R^2}$$

- pole **wewnątrz** tejże czaszy:

$$g = 0$$

- pole **wewnątrz jednorodnej kuli** o gęstości ρ :

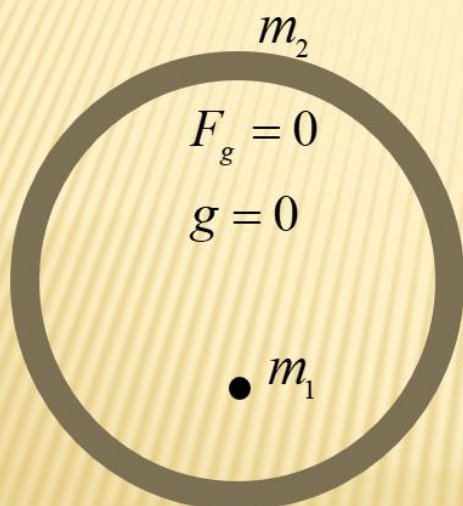
$$g(r) = \frac{4}{3} \pi \rho G r = \left(G \frac{M}{R^2} \right) \frac{r}{R}$$



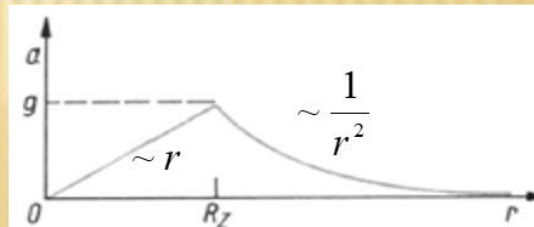
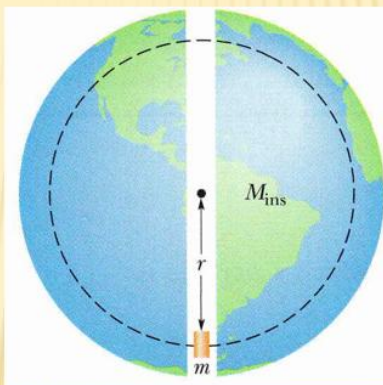
Przykład: pole grawitacyjne Ziemi

Grawitacja wewnątrz jednorodnej czaszy i kuli

Jeżeli masa m_2 jest rozłożona w czaszy równomiernie to wypadkowe pole grawitacyjne wewnątrz czaszy jest zerowe



Czyli ciało o masie m_1 pozostanie w spoczynku



PIERWSZA PRĘDKOŚĆ KOSMICZNA

Pierwszą prędkością kosmiczną nazywamy prędkość jaką musi mieć punkt materialny swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi (o promieniu $r = R_Z$), lub ogólniej wokół ciała niebieskiego o masie M i promieniu r równym pr. tego ciała

$$F_{odś} = F_g$$

$$\frac{mv^2}{R_Z} = G \frac{Mm}{R_Z^2} \quad \Rightarrow \quad v_I = \sqrt{\frac{GM}{R_Z}}$$

Dla Ziemi:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} \cong 7,9 \text{ km/s}$$

Dla Księżyca: $v_I = 1,68 \text{ km/s}$

Dla Słońca: $v_I = 436,74 \text{ km/s}$

DRUGA PRĘDKOŚĆ KOSMICZNA

Drugą prędkością kosmiczną nazywamy **najmniejszą** możliwą prędkość jaką musi mieć punkt materialny przy powierzchni Ziemi (lub innego ciała niebieskiego), aby mógł oddalić się od niej w nieskończoność; prędkość tę nazywamy również prędkością ucieczki.

$$E_{\text{cał}}(R_Z) = E_{\text{cał}}(\infty)$$

$$\frac{1}{2}mv_{II}^2 - G\frac{Mm}{R_Z} = 0$$

Dla Ziemi:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} = \sqrt{2}v_I \cong 11,2 \text{ km/s}$$

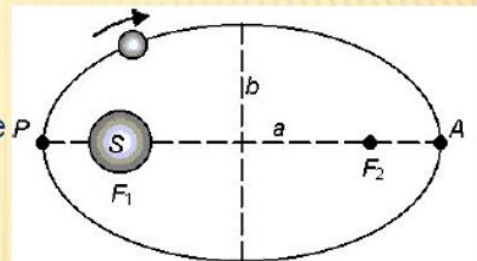


Dr hab. inż. Władysław Artur Woźniak

PRAWA KEPLERA

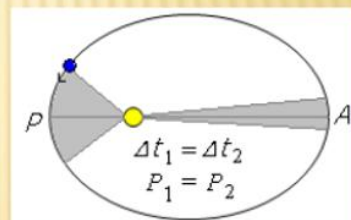
- **Pierwsze prawo Keplera:**

Każda planeta krąży po orbicie eliptycznej, ze Słońcem w jednym z ognisk tej elipsy.



- **Drugie prawo Keplera** (prawo równych pól):

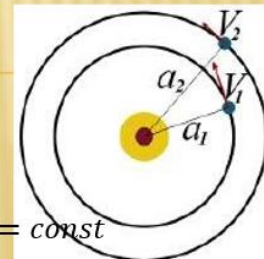
Linia łącząca Słońce i planetę zakreśla równe pola w równych odstępach czasu.



- **Trzecie prawo Keplera:**

Sześciany pólci wielkich orbit jakichkolwiek dwóch planet mają się tak do siebie, jak kwadraty ich okresów obiegu:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \text{Lub:} \quad \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \text{const}$$



Ogólniej ciało niebieskie może przelatywać w polu grawitacyjnym innego ciała po torze który jest krzywą drugiego stopnia (krzywą stożkową).

W zależności od tego jaka jest energia całkowita E ciała możliwe są następujące tory:

- $E < 0$ – orbita eliptyczna (zamknięta)
- $E = 0$ – orbita paraboliczna (otwarta)
- $E > 0$ – orbita hiperboliczna (otwarta)
- Dla powyższych przypadków możliwy jest też tor prostoliniowy przechodzący przez środek pola grawitacyjnego

Całkowita energia mechaniczna satelity o masie m krążącego swobodnie wokół ciała o masie M

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$F_{doś} = F_g$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad \frac{mv^2}{1} = G \frac{Mm}{r}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = G \frac{Mm}{2r}$$

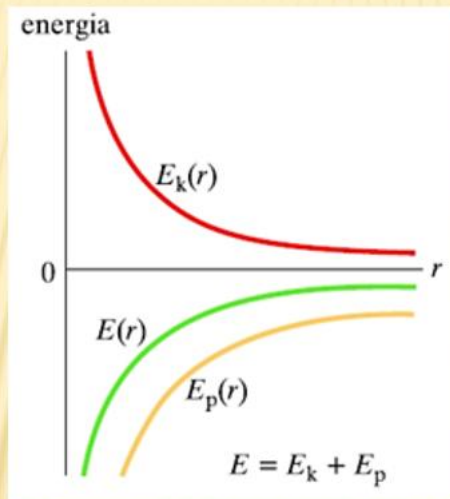
$$E_{cal} = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r} = G \frac{Mm}{2r} - G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{2r} < 0$$

Czyli orbita jest zamknięta (eliptyczna)

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = G \frac{Mm}{2r}$$

$$E(r) = E_k + E_p = -G \frac{Mm}{2r} < 0$$



Gdzie $E(r)$ jest energią całkowitą satelity krążącego wokół centrum np.. Ziemi wokół Słońca

Trzecie prawo Keplera (dla ruchu po okręgu)

$$F_{doś} = F_g$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

ale $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$

$$\frac{m \left(\frac{2\pi \cdot r}{T} \right)^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{const}$$

Czyli obliczona stała wartość jest stała tylko dla danego układu planetarnego bo zależy od masy centralnego obiektu w tym układzie. W innym układzie będzie inna stała.

TERMODYNAMIKA

Przedmiotem termodynamiki jest badanie zjawisk, których opis wymaga wprowadzenia pojęcia temperatury. Teorię zjawisk termodynamicznych można budować dwojako.

W pierwszym opisie traktuje się ciała stałe, ciecze i gazy jako ośrodki ciągłe nie mające budowy cząsteczkowej. Mówimy wtedy o **termodynamice fenomenologicznej**, opartej na faktach doświadczalnych.

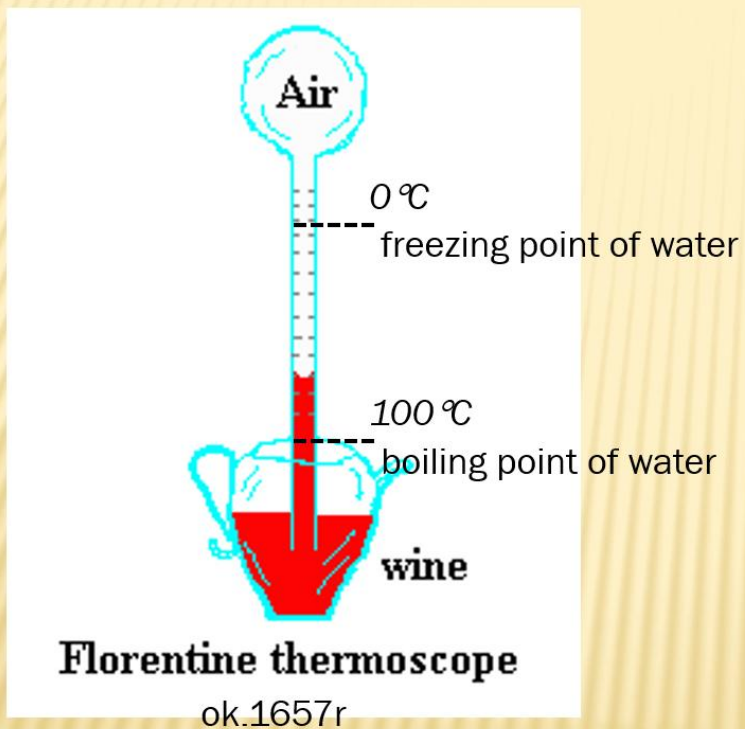
Drugi sposób uwzględnia budowę cząsteczkową ciał i opiera się na prawach rządzących dużymi zbiorami cząstek. Mówimy wtedy o **termodynamice statystycznej**.

Termodynamika fenomenologiczna bada związki między makroskopowymi wielkościami charakteryzującymi układ w całości, takimi jak: ciśnienie, temperatura, objętość, energia, entropia itd. Opiera się ona na kilku zasadach zwanych **zasadami termodynamiki**.

Termodynamika statystyczna przyjmuje mikroskopowy punkt widzenia. Rozważane są tu wielkości opisujące atomy i cząsteczki tworzące układ, mianowicie: ich **prędkości, masy, energie, pędy** itd. Opierając się na mechanice i stosując metody rachunku prawdopodobieństwa można znaleźć związki między wielkościami mikroskopowymi odnoszącymi się do poszczególnych cząstek układu, a makroskopowymi, opisującymi układ jako całość.

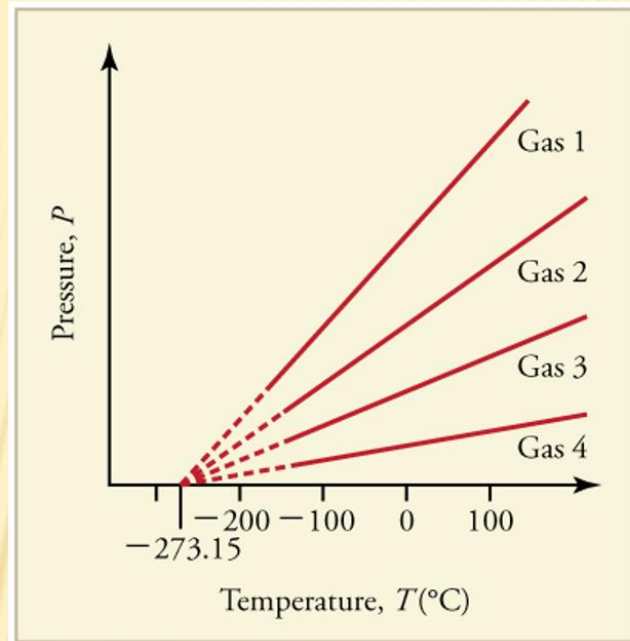
Termodynamika statystyczna jest teorią ogólniejszą od fenomenologicznej gdyż zasady termodynamiki fenomenologicznej oraz granice ich stosowalności można wyprowadzić na gruncie termodynamiki statystycznej.

Temperature w skali Celsjusza (1742r.)



Temperatura w skali Kelwina – zero absolutne (1848r.)

Wszystkie linie zbiegają się w jednym punkcie dla ciśnienia $p=0$ Pa.
Dla $p=0$ Pa przyjęto $T=0$ K.
Ale zachowano skok o jeden stopień tzn.:
 $\Delta t = 1^\circ\text{C} = \Delta T = 1\text{K}$



Zero absolutne

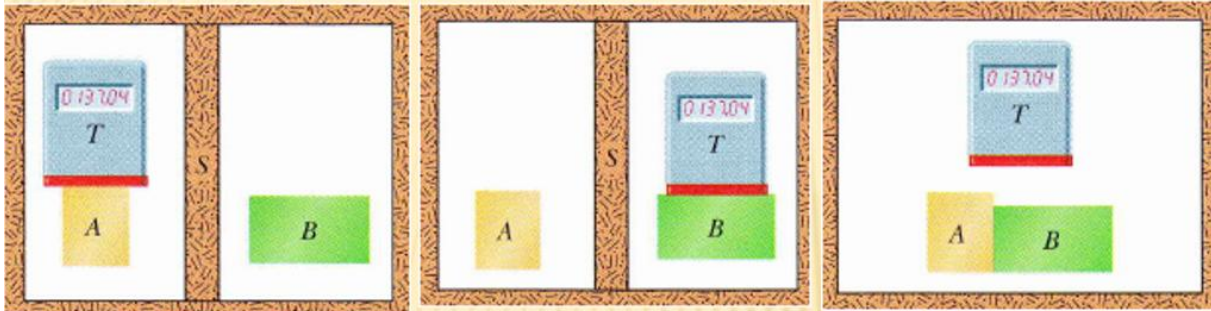
$$0\text{K} = -273,15^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad T[\text{K}] = t[^\circ\text{C}] + 273,15$$

$$\Delta t = 1^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad \Delta T[\text{K}] = 1\text{K}$$

Równowaga termodynamiczna

Dwa ciała są w równowadze termodynamicznej wtedy i tylko wtedy gdy mają tę samą temperaturę.

Zerowa zasada termodynamiki



Jeżeli ciała A i B znajdują się w równowadze termodynamicznej z trzecim ciałem C, to ciała A i B są ze sobą w równowadze termodynamicznej.

Równanie stanu gazu doskonałego

Stan pewnej ilości gazu określają jednoznacznie trzy parametry stanu: ciśnienie p , objętość V , temperatura T .

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

gdzie:

n - liczba moli danego gazu,

$R = 8.314 \text{ J/(molK)}$ - uniwersalna stała gazowa.

Jest to **równanie Clapeyrona** (równanie stanu gazu doskonałego).

Gazy rzeczywiste spełniają to równanie tym lepiej im wyższa jest ich temperatura i im niższe jest jego ciśnienie. Fikcyjny gaz, który spełniałby to równanie w każdych warunkach, nazywamy gazem doskonałym.

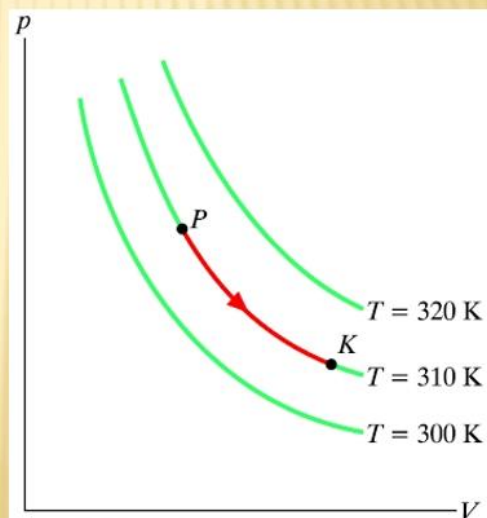
Równanie Clapeyrona sformułowane zostało w roku 1834 na bazie wcześniej odkrytych doświadczeń praw

Prawo Boyle'a-Mariotte'a (1661 i 1676)

przemiana izotermiczna:

Jeśli $T = \text{const}$ to $pV = \text{const}$,

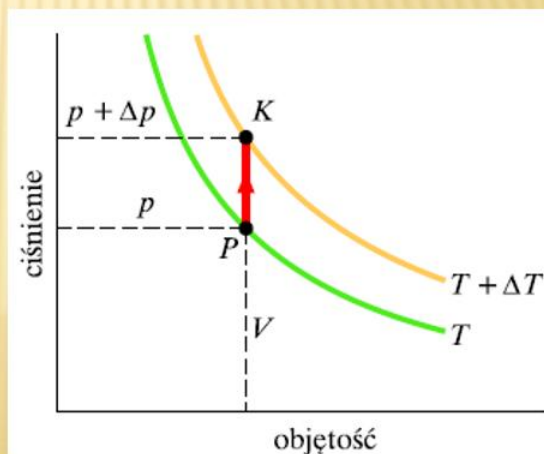
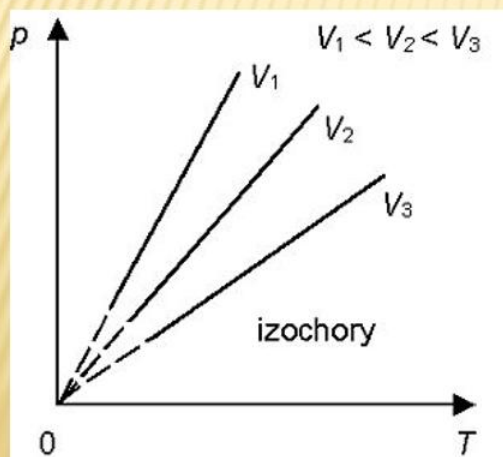
$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$



Prawo Charlesa (1787) - przemiana izochoryczna

Jeśli $V = \text{const}$ to $\frac{p}{T} = \text{const}$

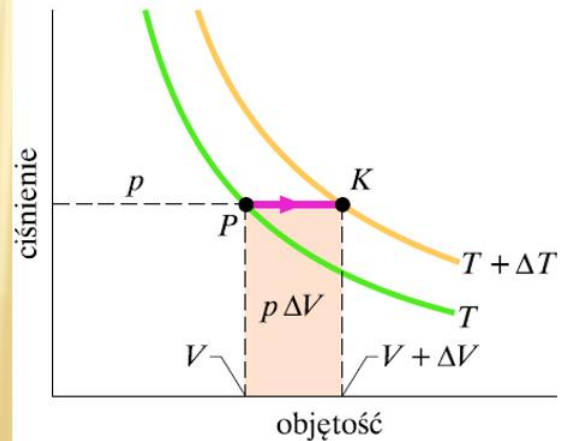
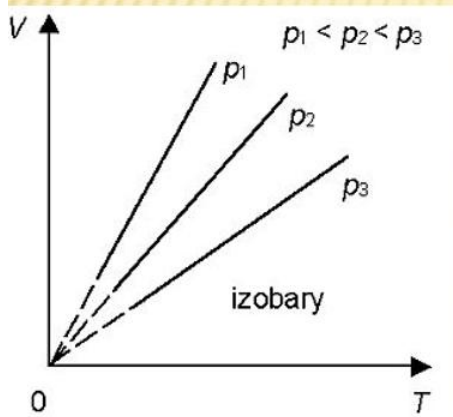
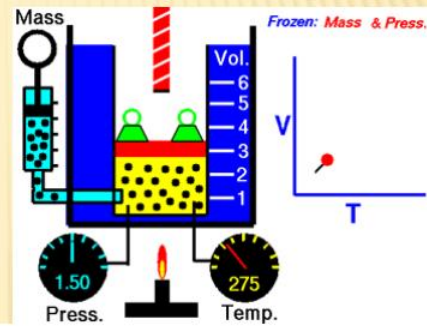
$$p = \text{const} \cdot T \quad p = \frac{nR}{V} \cdot T$$



Prawo Gay-Lussaca (1802) – przemiana izobaryczna

Jeśli $p = \text{const}$ to $\frac{V}{T} = \text{const}$

$$V = \text{const} \cdot T \quad V = \frac{nR}{p} \cdot T$$



$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Jeden mol dowolnego gazu zawiera stałą liczbę cząstek, zwaną liczbą Avogadra $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$ cząstek na mol.

Więc:

$$n = \frac{N}{N_A}$$

$$pV = \frac{N}{N_A} RT = NkT$$

Gdzie: $k = \frac{R}{N_A}$

k – stała Boltzmana

Energia wewnętrzna

Energią wewnętrzną U danego ciała nazywamy sumę energii kinetycznych ruch cieplnego cząsteczek i energii potencjalnych ich wzajemnego oddziaływania.

Znajomość całkowitej energii wewnętrznej ciała nie jest nam zwykle potrzebna, ponieważ interesują nas głównie zmiany energii ΔU .

Pierwsza zasada termodynamiki:

Energię wewnętrzną układu można zmienić na dwa sposoby:

- poprzez **wymianę ciepła Q** z otoczeniem
- poprzez **wykonanie pracy W** nad układem.

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q + W$$

W tym zapisie $W > 0$ gdy praca jest wykonywana przez otoczenie nad układem

W postaci różniczkowej (dla nieskończenie małej zmiany stanu układu) I zasadę termodynamiki zapisujemy w postaci:

$$dU = \delta Q + \delta W$$

lub:

$$dU = \delta Q - \delta W$$

Czym różnią się te dwa zapisy?

W ostatnim zapisie $\delta W > 0$, gdy układ wykonuje pracę nad otoczeniem

Dostarczone ciepło

$$\delta Q = nC_p dT$$

$$\delta Q = mc_p dT$$

lub

$$\delta Q = nC_v dT$$

$$\delta Q = mc_v dT$$

Ale: $n = \frac{m}{\mu}$

$$nC_p dT = mc_p dT = n\mu c_p dT \Rightarrow C_p = \mu c_p$$

Tak samo otrzymujemy:

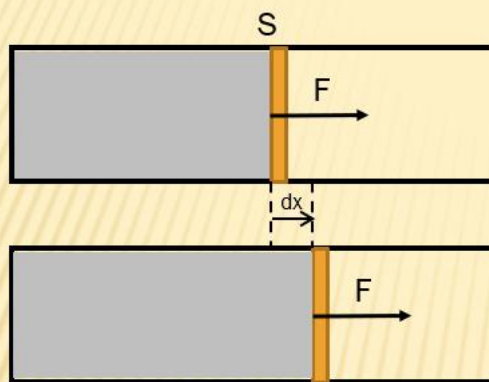
$$C_v = \mu c_v$$

Gdzie C_p - ciepło molowe w przemianie izobarycznej,

c_p - ciepło właściwe w przemianie izobarycznej.

Indeks „v” oznacza przemianę izochoryczną.

Praca w przemianach gazowych - ogólnie



$$\delta W = Fdx = pSdx = pdV$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Praca w przemianie izotermicznej

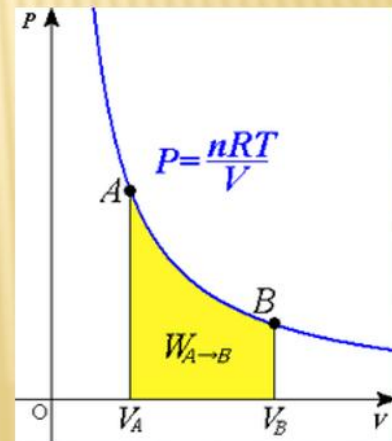
$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$pV = nRT$$

$T = \text{const}$

$$p = \frac{nRT}{V}$$

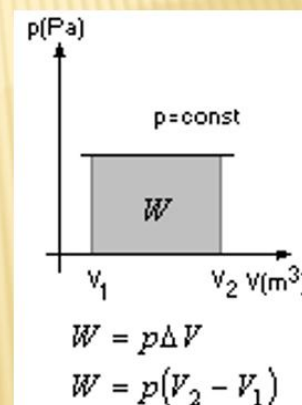
$$W = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$



Praca w przemianie izobarycznej

$p = \text{const}$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$$



Praca w przemianie izochorycznej

$V = \text{const}$

więc: $W = 0$

Energia wewnętrzna U jest funkcją stanu tzn. nie zależy od sposobu dojścia do danego stanu lecz jedynie od parametrów tego stanu, a zmiana energii wewnętrznej od stanu początkowego i końcowego, a nie od przemian jakie wystąpiły między stanem początkowym i końcowym.

Obliczmy zmianę energii wewnętrznej w przemianie izochorycznej?

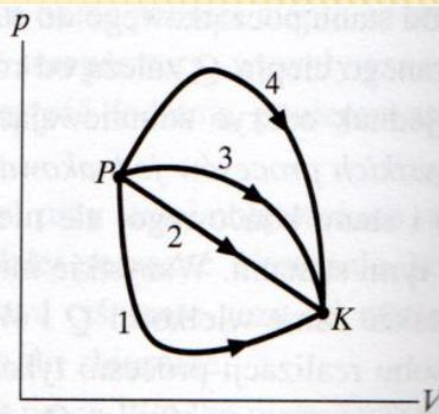
$$dU = \delta Q - \delta W$$

$$dU = nC_v dT$$

Dla gazów ten wzór jest słuszny zawsze!!!

czyli nawet dla innych przemian (bo wzór dotyczy zmiany energii wewnętrznej, a ta zmiana zależy tylko od stanu początkowego i końcowego, a nie od przemian pomiędzy tymi stanami).

SPRAWDZIAN 5: Zamieszczony obok wykres we współrzędnych p - V przedstawia cztery krzywe opisujące możliwe przemiany gazu od stanu P do stanu K . U szereguj krzywe według odpowiadającej im: a) zmiany energii wewnętrznej ΔE_w , b) wartości pracy W wykonanej przez gaz i c) wartości ciepła Q przekazanego do układu. W każdym przypadku zacznij od wartości największej.



$$dU = \delta Q - \delta W \qquad dU = nC_v dT$$

- Odp: a) $\Delta E_{w1} = \Delta E_{w2} = \Delta E_{w3} = \Delta E_{w4}$
 b) $W_1 < W_2 < W_3 < W_4$
 c) $Q_1 < Q_2 < Q_3 < Q_4$

równanie Mayera

I zas. termodynamiki: $dU = \delta Q - \delta W$

W przypadku przemiany izobarycznej I zasada termodynamiki ma postać:

$$nC_V dT = nC_p dT - p dV$$

Z równania Clapeyrona mamy:

$$pV = nRT \Rightarrow p dV = nR dT$$

Więc:

$$nC_V dT = nC_p dT - nR dT$$

$$C_V = C_p - R$$

$$R = C_p - C_V$$

równanie
Mayera

Przemiana adiabatyczna

Przemianą adiabatyczną nazywamy przemianę układu zachodzącą bez wymiany ciepła z otoczeniem ($\delta Q = 0$).

$$dU = \delta Q - \delta W \Rightarrow nC_V dT = -p dV \Rightarrow nC_V dT = -\frac{nRT}{V} dV \quad | : (nC_V T)$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} \quad \text{całkujemy} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ p = \frac{nRT}{V} \end{matrix} \quad \ln T = -\frac{R}{C_V} \ln V + \text{const} \quad \ln TV^{\frac{R}{C_V}} = \text{const}$$

Ale r. Mayera: $R = C_p - C_V$

Więc:

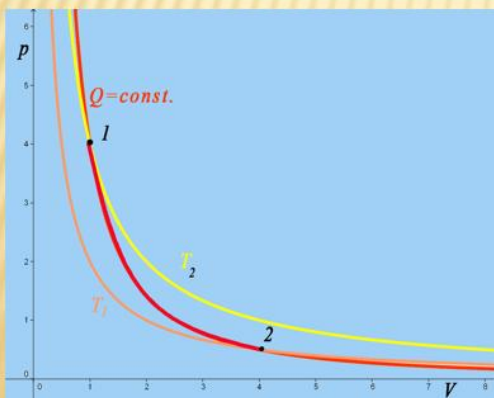
$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

$$TV^{\kappa-1} = \text{const} \quad \text{lub} \quad pV^{\kappa} = \text{const}$$

Równania adiabaty (r. Poissona)

Uwaga na STUDIUM TALENT
całkowanie nie obowiązuje, więc to
wyprowadzenie też. Natomiast
warto znać uzyskane równania
adiabaty

Przemiana adiabatyczna jest często wykorzystywana w praktyce. Np. w silniku dieslowskim występuje adiabatyczne sprężanie powietrza zawartego w cylindrze. Zmniejszaniu się objętości towarzyszy zwiększanie się temperatury. Sprężane powietrze ogrzewa się do temperatury rzędu 1000K, dzięki czemu wtrysnięte paliwo natychmiast zapala się samoczynnie. Proces sprężania możemy w tym przypadku traktować jako adiabatyczny, mimo że ścianki nie są izolatorami cieplnymi. Ze względu jednak na krótki czas sprężania, wymiana ciepła z otoczeniem jest nieznaczna



Podczas przemiany adiabatycznej zmieniają się trzy parametry stanu: p , V , T .

Praca w przemianie adiabatycznej

$$dU = \delta Q - \delta W \quad \delta Q = 0$$

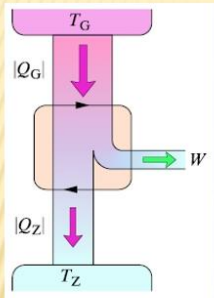
$$\delta W = -dU$$

czyli

$$dW = -nC_V dT$$

$$W_{A \rightarrow B} = -nC_V \int_{T_A}^{T_B} dT = nC_V (T_A - T_B)$$

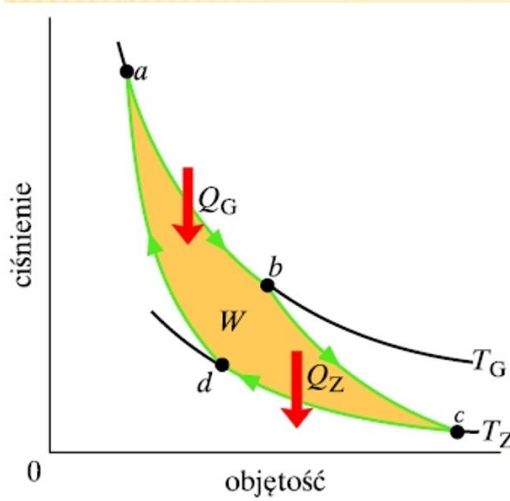
Maszyna cieplna



Sprawność maszyny cieplnej

$$\eta = \frac{W}{Q_G} = \frac{Q_G - Q_Z}{Q_G}$$

Maszyna cieplna – cykl Carnota



$$\eta = \frac{W}{Q_G}$$

Carnot przyjął, że czynnikiem roboczym wykonującym jego cykl jest gaz doskonały.

$$W = W_{ab} + W_{bc} + W_{cd} + W_{da}$$

$$ab : T = \text{const} \quad W_{ab} = Q_G = nRT_G \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$cd : T = \text{const} \quad W_{cd} = Q_Z = nRT_Z \ln \frac{V_d}{V_c}$$

$$bc : \delta Q = 0 \quad W_{bc} = nC_V(T_G - T_Z)$$

$$da : \delta Q = 0 \quad W_{da} = nC_V(T_Z - T_G)$$

$$W = W_{AB} + W_{CD} = nR \left(T_G \ln \frac{V_b}{V_a} - T_Z \ln \frac{V_c}{V_d} \right) = nR(T_G - T_Z) \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$\begin{cases} T_G V_b^{\kappa-1} = T_Z V_c^{\kappa-1} \\ T_G V_a^{\kappa-1} = T_Z V_d^{\kappa-1} \end{cases}$$

stąd: $\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$

$$\eta = \frac{W}{Q_G} = \frac{T_G - T_Z}{T_G} = 1 - \frac{T_Z}{T_G}$$

$$\eta = \frac{T_G - T_Z}{T_G} = 1 - \frac{T_Z}{T_G} \quad (*)$$

Druga zasada termodynamiki

Rudolf Clausius:

Nie możliwy jest samorzutny przepływ ciepła od ciała mniej nagranego do ciała gorętszego

(Wymuszony taki przepływ jest możliwy np. w maszynach chłodniczych, ale w wyniku wykonania pewnej pracy)

✓ **Uogólnienie na dowolne czynniki robocze:**

Wzór (*) na sprawność silnika Carnota jest słuszny również w przypadku gdy przemianie ulega dowolny czynnik roboczy.

✓ **Uogólnienie na inne cykle odwracalne:**

Każdy cykl odwracalny można podzielić na dowolnie wielką liczbę wąskich cykli Carnota. Czyli można wykazać, że sprawność dowolnego cyklu odwracalnego jest równa co najwyżej sprawności wyrażonej wzorem (*)

Czyli wzór na sprawność maszyny cieplnej pracującej w cyklu Carnota mówi nam jakie limity stwarza natura. Nie możemy stworzyć silnika cieplnego o wyższej sprawności.

Sprawność maszyny cieplnej

$$\eta = \frac{T_G - T_Z}{T_G} = 1 - \frac{T_Z}{T_G}$$

Dla cyklu Carnota (temperatury tylko w Kelwinach!!!)

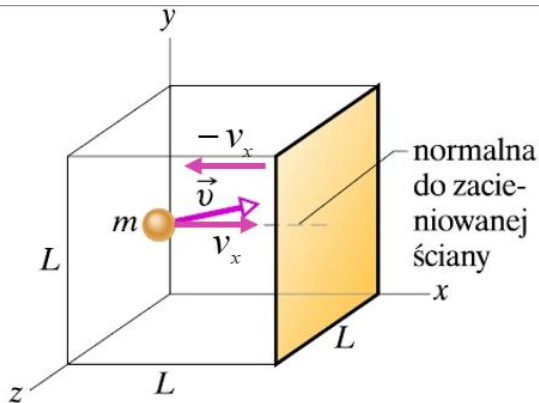
$$\eta = \frac{W}{Q_G} = \frac{Q_G - Q_Z}{Q_G} = 1 - \frac{Q_Z}{Q_G}$$

Dla dowolnego silnika cieplnego (w tym również dla silnika Carnota)

Teoria kinetyczno-cząsteczkowa

Założenia kinetycznej teorii gazu doskonałego:

- Cząsteczki gazu są punktami materialnymi o równych masach,
- Cząsteczki gazu wykonują chaotyczny ruch (żaden kierunek nie jest uprzywilejowany),
- Cząsteczki gazu zderzają się sprężysto ze sobą i ze ściankami naczynia,
- Siły działają tylko w momentach zderzeń,
- (objętość cząsteczek gazu jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z objętością zajmowaną przez gaz).



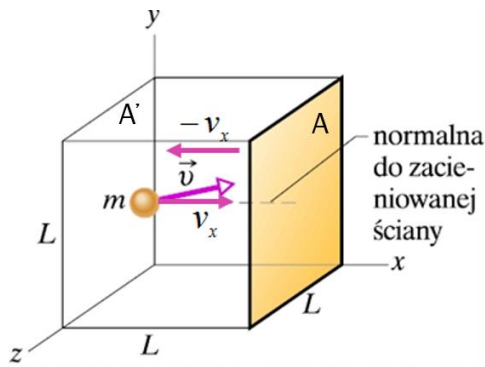
Rys. 20.3. Zbiornik w kształcie sześcianu o krawędzi L zawiera n moli gazu doskonałego. Cząsteczka o masie m i prędkości $\vec{v}$ za chwilę zderzy się z zacieniowaną ścianą o powierzchni L^2 .

Ciśnienie gazu doskonałego

Zajmijmy się jedną z cząsteczek o prędkości $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]$. Gdy cząsteczka ta uderza o ściankę A *prostopadłą* do osi x , to jej składowa prędkości v_x jedynie zmienia znak ponieważ odbicie jest sprężyste, a pozostałe składowe nie ulegają zmianie.

$$\Delta p = p'_x - p_x = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x$$

Na mocy zasady zachowania pędu można stwierdzić, że ścianka naczynia w wyniku uderzenia cząsteczki zyska pęd równy $2mv_x$.



$$\Delta p = 2mv_x$$

Przypuśćmy, że rozważana cząsteczka po odbiciu od ścianki A osiąga ściankę A' i powraca do ścianki A nie zderzając się po drodze z żadną inną cząsteczką. Czas upływający pomiędzy kolejnymi odbiciami od ścianki A₁ wynosi :

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki zmiana pędu ścianki A w jednostce czasu jest równa sile działającej na tę ściankę:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}$$

Ciężenie wywierane na ściankę przez jedną cząstkę wynosi zatem:

$$p_1 = \frac{F}{L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} = \frac{mv_x^2}{V}$$

Aby obliczyć ciśnienie wywarte na ściankę przez N cząsteczek zawartych w sześcianie, należy otrzymane wyrażenie zsumować po wszystkich cząsteczkach. Zatem:

$$p = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2$$

Wprowadźmy średnią wartość kwadratu prędkości:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{yi}^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{zi}^2 = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2$$

$$p = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2$$

$$\overline{v^2} = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 = \frac{N}{3} \overline{v^2}$$

Zatem:

$$p = \frac{mN\overline{v^2}}{3V}$$

lub:

$$p = \frac{\rho \overline{v^2}}{3}$$

gdzie gęstość :

$$\rho = \frac{mN}{V}$$

Równania te stanowią kinetyczną interpretację ciśnienia.

Kinetyczna interpretacja temperatury:

$$pV = \frac{mN\overline{v^2}}{3} = \frac{2}{3} N \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{2}{3} N \bar{E}_k = \frac{2}{3} n N_A \bar{E}_k$$

ale $pV = nRT$ więc:

k – stała Boltzmana

$$\frac{2}{3} n N_A \bar{E}_k = nRT \Rightarrow \bar{E}_k = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \bar{E}_k = \frac{3}{2} kT \quad k = \frac{R}{N_A}$$

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$$

Temperatura jest miarą średniej energii kinetycznej cząstek

Rozpatrywaliśmy gaz o cząsteczkach jednoatomowych, czyli posiadających $f = 3$ stopnie swobody.

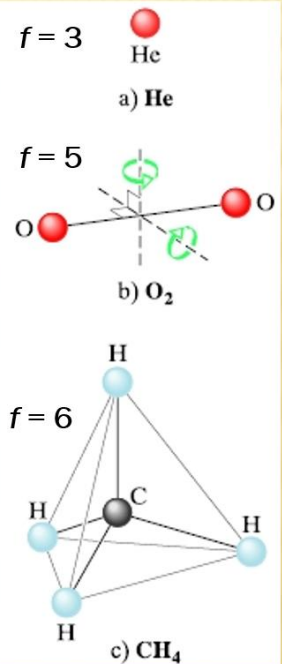
Wynika stąd, że na każdy stopień swobody przypada:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2} kT$$

Zasada ekwipartycji energii

Czyli cząstka o f stopniach swobody ma energię:

$$\bar{E}_k = \frac{f}{2} kT$$



Ciepła molowe

$$k = \frac{R}{N_A}$$

$$\bar{E}_k = \frac{f}{2} kT$$

Średnia energia kinetyczna pojedynczej cząstki gazu

$$U = \frac{f}{2} N k T = \frac{f}{2} N \frac{R}{N_A} T = n \frac{f}{2} R T$$

całkowita energia wewnętrzna gazu zawierającego N cząstek

$$\frac{dU}{dT} = n \frac{f}{2} R \quad \Rightarrow \quad dU = n \frac{f}{2} R dT$$

ale $dU = n C_v dT$

więc

$$C_v = \frac{f}{2} R$$

$$C_p = \frac{f+2}{2} R$$

bo r. Mayera: $R = C_p - C_v$

$$C_p = R + C_v = R + \frac{f}{2} R = \frac{f+2}{2} R$$

Omówiłem jeszcze mechanikę płynów ale nie będzie jej na egzaminie