Marcin Krzysztof Michalski

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Podzbiory grup i przestrzeni polskich związane ze strukturą algebraiczną oraz mierzalnością względem różnych ideałów

Promotor: **Dr hab. Szymon Żeberski**

W niniejszej rozprawie przedmiotem rozważań będą pewne specjalne podzbiory przestrzeni polskich. Zbadamy ich własności, zwłaszcza te związane z mierzalnością względem ideałów, strukturą algebraiczną i topologiczną. Szczególnym zainteresowaniem obdarzymy zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina oraz ideały drzewiaste, a także zajmiemy się istnieniem zbiorów uniwersalnych możliwie niskiej złożoności dla wybranych ideałów. Odświeżymy również pewien klasyczny wynik dotyczący rozkładu prostej rzeczywistej na pełne, względem miary lub kategorii, podzbiory.
W rozdziale 1 ustalimy notację i zgromadzimy przydatne w dalszych częściach rozprawy narzędzia i fakty, a także nadamy kontekst naszym rozważaniom. W szczególności precyzyjnie zdefiniujemy na potrzeby tej pracy technikę fuzji dla zbiorów doskonałych oraz drzew Millera i Lavera, a także dokonamy lokalizacji ciał drzew różnego typu na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Wprowadzimy również pojęcie zbiorów uniwersalnych dla ideałów i uzasadnimy powód przyjęcia właśnie takiej definicji, a także podamy motywację do zajmowania się tego typu zbiorami. Dokonamy także kilka wstępnych, nietrywialnych obserwacji na temat ideałów drzewiastych.
Rozdział 2 jest zdominowany rozważaniami na temat zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$. Nasamprzód w tym rozdziale zajmiemy się mierzalnością tych zbiorów. Na otwarcie dowiedziemy lematu dotyczącego przesunięć zbiorów doskonałych, by na jego podstawie zakonkludować, że Słabsza Własność Smitala wystarcza do $\mathcal{I}$-niemierzalności zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina, a także, wraz z faktem głoszącym, że istnienie zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina pociąga istnienie zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina o mocy, której kofinalność jest nieprzeliczalną liczbą kardynalną, przedstawimy metodę generowanie super zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina ze zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina. Podamy również warunek równoważny mierzalności zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina i zbadamy relacje pomiędzy niektórymi, istotnymi w tym kontekście, własnościami ideałów. W kolejnej części rozdziału 2 dokonamy rozkładów przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^n$ na zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina, zaczynając od rozkładu przy minimalnym założeniu (istnieje zbiór $\mathcal{I}$-Łuzina), a kończąc na rozkładzie $\mathbb{R}^n$ na przesunięcia zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina o wektory pochodzące również ze zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina. Następnie wykonamy różne konstrukcje wykorzystujące strukturę liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina, na ogół przy pewnych założeniach dotyczących współczynników kardynalnych ideału $\mathcal{I}$. Na szczególną uwagę zasługuje konstrukcja (przy założeniu istnienia zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina) podzbioru płaszczyzny, którego przekrój z każdą prostą jest zbiorem $\mathcal{I}$-Łuzina, a on sam jest całkowicie niemierzalny względem ideału na płaszczyźnie zawierającego proste. Rozdział ten zwieńczymy konstrukcjami uogólnionego zbioru Łuzina L i uogólnionego zbioru Sierpińskiego S, dla których $L + L$ i $S + S$ są zbiorami Bernsteina. Wyniki umieszczone w tym rozdziale pochodzą w głównej mierze z prac [6] oraz [4].
Rozdział 3 poświęcony jest ideałom drzewiastym. W pierwszej części tego rozdziału zajmiemy się mierzalnością względem ideałów drzewiastych. Korzystając z technik wypracowanych przez J. Brendlego w pracy [1] uzupełnimy jego rozważania o ideał cl_0, tzn. pokażemy, że dla $t_0 \in \{s_0, m_0, l_0\}$ zachodzi $cl_0 \not\subseteq t_0$ oraz $s_0 \not\subseteq cl_0$ i $m_0 \not\subseteq cl_0$, ale $l_0 \subseteq cl_0$. W dalszej kolejności dokonamy eksploracji pojęcia zbiorów $\mathbb{T}$-Bernsteina, między innymi

podając charakteryzację tych zbiorów przez ich ślad na $t_0 \cap \mathcal{B}$. Następnie skupimy się na własnościach algebraicznych związanych z rodzinami drzew doskonałych, Millera, Lavera i zupełnych Lavera. Znajduje to odzwierciedlenie w serii lematów, które później znajdują zastosowanie w dowodzie głównego wyniku tego rozdziału, który głosi, że jeśli $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną, to suma algebraiczna uogólnionego zbioru Łuzina i uogólnionego zbioru Sierpińskiego należy do każdego z ideałów drzewiastych s_0, m_0, l_0 i cl_0. Wynik ten dla ideału s_0 został opublikowany w [6], jego uogólnienie na pozostałe ideały wraz z odpowiednimi rezultatami, które do niego prowadzą, oraz rozważania dotyczące mierzalności względem ideałów drzewiastych są zawarte w wysłanej do recenzji pracy [7].
W rozdziale 4 za cel obierzemy skonstruowanie lub wykazanie istnienia zbiorów uniwersalnych możliwie niskiej złożoności dla różnych ideałów posiadających bazę borelowską. Wskażemy ogólną metodą na pozyskiwanie takich zbiorów dla ideałów, które są $\mathcal{B}$-na-Σ^1_1, i podamy kilka kombinatorycznych dowodów na istnienie zbiorów uniwersalnych dla wybranych ideałów. Wykażemy również, że dla ideałów produktowych pewnej klasy istnieją zbiory uniwersalne, w szczególności dla ideałów produktowych $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$. Artykuł, w którego skład wchodzą wyniki zamieszczone w rozdziale 4, został przyjęty do publikacji ([2]).
Rozdział 5 jest rezultatem zmagań z twierdzeniem Łuzina-Nowikowa. Odnosząc tylko częściowy sukces w prześledzeniu rozumowania z pracy [3] udowodnimy wspomniane twierdzenie w inny sposób, otrzymując przy okazji interesujący wynik dotyczący własności Fubiniego dla pary $(\mathcal{M}, \mathrm{NWD})$ bez wymogu mierzalności. Oczyszczony z nieścisłości i precyzyjnie wysłowiony dowód twierdzenia Łuzina-Nowikowa jest treścią tego rozdziału. Efekty tego przedsięwzięcia zostały opublikowane w pracy [5]

Literatura

[1] Brendle J., *Strolling trough paradise*, Fundamenta Mathematicae, vol. 148 (1995), pp. 1-25.

[2] Cieślak A., Michalski M., *Universal sets for ideals*, przyjęte do druku w Bulletin Polish Acad. Sci. Math. (2018).

[3] Łuzin N. N., *Sur la decomposition des ensembles*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 198, no. 5 (1934), pp. 1671-1674.

[4] Michalski M., *On some relations between properties of invariant σ-ideals in Polish spaces*, 14^{th} Students' Science Conference (publikacja pokonferencyjna), pp. 29-33, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, ISSN: 1732-0240 (2016).

[5] Michalski M., *Rediscovered theorem of Luzin*, 15^{th} Students' Science Conference (publikacja pokonferencyjna), pp. 205-210, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, ISSN: 1732-0240 (2017).

[6] Michalski M., Żeberski Sz., *Some properties of $\mathcal{I}$-Luzin sets*, Topology and its Applications, vol. 189 (2015), pp. 122-135.

[7] Michalski M., Rałowski R., Żeberski Sz., *Nonmeasurable sets and unions with respect to tree ideals*, arXiv:1712.05212 (2017).