

I N S T Y T U T   F I Z Y K I   T E O R E T Y C Z N E J  
U N I W E R S Y T E T   W A R S Z A W S K I  
UL. PASTEURA 5, 02-093 WARSZAWA

---

prof. dr hab. Witold Bardyszewski  
Instytut Fizyki Teoretycznej  
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski  
ul. Pasteura 5, 00-681 Warszawa

**Recenzja pracy doktorskiej mgr inż. Patrycji Łydzby**  
**pt.: “ Układy silnie skorelowane w geometrii  $\mathbb{R}^2$  oraz zewnętrznym polu**  
**magnetycznym: Kwantowy efekt Halla w ujęciu grup warkoczowych”**

Już niemal cztery dekady upłynęły od momentu odkrycia całkowitego (IQHE), a następnie ułamkowego (FQHE) efektu Halla w dwuwymiarowym gazie elektronowym. Odkrycia te zainicjowały intensywne poszukiwania związku między symetrią zamiany kwazicząstek i statystyką w takich układach. Geometria dwuwymiarowa charakteryzująca QHE dopuszcza bowiem istnienie kwazicząstek o innej statystyce niż bozony i fermiony, zwanych anyonami. Z pełną odpowiedzialnością można stwierdzić, że mechanizm kwantowego efektu Halla i jego powiązanie za statystyką kwazicząstek na obecnym etapie pozostawia wiele niewyjaśnionych kwestii. Recenzowana rozprawa napisana pod opieką profesora Lucjana Jacaka, który pełni rolę promotora oraz dr. Janusza Jacaka w roli promotora pomocniczego, stawia to zagadnienie w ciekawej perspektywie, dającej być może nadzieję na głębsze jego zrozumienie.

Autorka rozprawy opiera swoje rozważania na trzech filarach: symetrii, topologii i koncepcji współmierności nakładanej przez pole magnetyczne na dwuwymiarowy gaz elektronowy. Wykazała, że czynniki te mogą mieć decydujący wpływ na nasze postrzeganie korelacji w układach tego typu. W czasie realizacji doktoratu autorka opublikowała wspólnie z promotorami łącznie sześć artykułów w prestiżowych czasopismach międzynarodowych posiadających wysoki Impact Factor oraz jeden rozdział w książce. Publikacje te przedstawiają główne idee ujęte w rozprawie oraz obejmują większość uzyskanych wyników.

Rozprawa została napisana w języku polskim, liczy 178 stron i zawiera streszczenie, sześć rozdziałów oraz podsumowanie i tezy rozprawy. Wstęp oraz następujące po nim rozdziały drugi i trzeci zawierają wprowadzenie oraz ogólne omówienie fizyki kwantowego efektu Halla. Z kolei rozdział czwarty prezentuje teoretyczne ramy obliczeń omówionych w pozostałych dwóch rozdziałach zawierających główne wyniki pracy.

We wstępie autorka zwraca uwagę na drugoplanową rolę oddziaływania między elektronami przy wyjaśnianiu całkowitego kwantowego efektu Halla w obowiązujących teoriach. W odniesieniu do ułamkowego kwantowego efektu Halla, w centralnym punkcie rozważań umieszczony jest model złożonych fermionów oparty na koncepcji słabo oddziałujących kwazicząstek złożonych z elektronów z przyłączonymi kwantami strumienia magnetycznego lub wirami. Efektywne cząstki (kwazicząstki) w tym modelu charakteryzują się zmienioną statystyką względem zwykłych fermionów. Autorka zwraca jednak uwagę, że natura przyłączenia kwantów strumienia nie ma jak dotąd zadowalającego wytłumaczenia. Kwestia ta będzie często przywoływana w dalszej części pracy w kontekście zaproponowanego modelu podgrup cyklotronowych pełnej grupy warkoczowej układu  $N$  elektronów. Model ten w wielu aspektach działa podobnie do modelu złożonych fermionów i wyjaśnia pojawienie się hierarchii Jaina współczynników wypełnienia pasma Landaua  $\nu$  oraz innych wypełnień obserwowanych w doświadczeniach. Model ten dodatkowo przewiduje kwantowanie przewodności poprzecznej w ich pobliżu.

W rozdziale 2 omówiono fizyczne podstawy efektu Halla. W szczególności przywołano podstawowe wiadomości na temat dynamiki elektronu w polu magnetycznym oraz w skrzyżowanych polach magnetycznym i elektrycznym, zarówno w modelu klasycznym jak i kwantowym. W tym ostatnim przypadku dla dalszego wywodu bardzo istotne jest wprowadzenie reprezentacji położenia elektronów za pomocą liczb zespolonych. Pojawia się również koncepcja pseudopędu generującego tzw. translacje magnetyczne. Autorka zwraca uwagę na kluczowy dla dalszych rozważań fakt, że klasyczne trajektorie w całce Feynmana dla ustalonego poziomu Landaua są zamknięte.

Kolejny rozdział zawiera przegląd podstawowych koncepcji “wyjaśniających” całkowity i ułamkowy kwantowy efekt Halla. Eksperymentalnie przejawia się on kwantowaniem poprzecznej składowej tensora przewodnictwa dla specyficznych wartości współczynnika wypełnienia poziomu Landaua t.j. występowaniem wyraźnie zarysowanych stopni przewodności poprzecznej w zależności od pola magnetycznego. Stopniom tym towarzyszą minima oporności podłużnej. Z oczywistych powodów zaprezentowany przegląd ogranicza się do najważniejszych modeli. W przypadku całkowitego kwantowego efektu Halla autorka koncentruje się na modelu prądów brzegowych, oraz argumentach Laughlina i Thoulessa nawiązujących do własności topologicznych próbki. Muszę przyznać, że autorka bardzo umiejętnie przedstawiła wymienione kwestie i omawiany rozdział mógłby być polecony jako wzorowe, zwięzłe wprowadzenie do skądinąd złożonego zagadnienia kwantowego efektu Halla. Uwaga ta dotyczy również następnej części, w której omówiono ułamkowy kwantowy efekt Halla w ujęciu teorii Cherna-Simonsa oraz modelu złożonych fermionów. Tutaj jednak należy zwrócić uwagę na tendencję autorki do wykonywania dramatycznych skrótów myślowych, do których czy-

telnik musi się przyzwyczaić. Przykładem może tutaj być prezentacja lagranżjanu w teorii Cherna-Simonsa oraz stwierdzenie przed wzorem (107) , że “W konsekwencji pole Cherna-Simonsa zmienia fazę funkcji falowej” bez wyjaśnienia czego to jest konsekwencja. Ponieważ zaś funkcja  $\Psi$  we wzorze (107) nie jest zdefiniowana, to powyższemu stwierdzeniu nie można zarzucić nieprawdy. Oczywiście następujące wzory są w porządku.

Rozdział czwarty omawiający kwantowy efekt Halla w ujęciu grup warkoczowych nie jest łatwy. W pierwszej jego części prezentującej podstawy teoretyczne wprowadzono koncepcję grupy warkoczowej jako grupy podstawowej przestrzeni konfiguracyjnej, która została zdefiniowana dopiero trzy strony dalej. W czytelniku nie przyzwyczajonym do skrótów myślowych mogłoby to wywołać wrażenie, że każda grupa podstawowa pewnej przestrzeni topologicznej jest grupą warkoczową. Na szczęście, dalszy wywód oraz odpowiednio dobrane przykłady jasno ilustrują intencje autorki, Najważniejsza część tego rozdziału dotyczy modelu podgrup cyklotronowych w najniższym poziomie Landaua. Jest on kluczowy dla dalszej części pracy i wprowadza specyficzne podgrupy pełnej grupy warkoczowej, a mianowicie tzw. podgrupy cyklotronowe. Spotykają się tutaj trzy wymienione na wstępie elementy. Zamknięte orbity cyklotronowe, których rozmiar powiązany jest warunkiem współmierności ze współczynnikiem wypełnienia poziomu skojarzone są z generatorami podgrup warkoczowych. Jednowymiarowe reprezentacje unitarne tych tzw. podgrup cyklotronowych dostarczają czynników fazowych wielocząstkowej funkcji falowej odpowiadających zamianie dwóch cząstek. Model ten dopuszcza istnienie kombinacji orbit wielopętlowych i prowadzi do prostego wzoru na dozwolone wartości współczynnika wypełnienia. W ten sposób kwazicząstki w modelu złożonych fermionów mogą być utożsamione z odpowiednimi podgrupami pełnej grupy warkoczowej, co odróżnia je od normalnych fermionów. Warto podkreślić, że wartości współczynników wypełnienia wynikające z omawianego modelu zgadzają się z wynikami teorii złożonych fermionów i w znacznej mierze pokrywają wartości eksperymentalne łącznie z tzw. wypełnieniami enigmatycznymi. Wyniki ten został rozszerzony również na wyższe poziomy Landaua.

Prezentowany model podgrup cyklotronowych daje możliwość rozpatrywania ograniczeń nakładanych na korelacje wielocząstkowe w oparciu o ogólne własności symetrii funkcji falowej układu  $N$  elektronów bez potrzeby budowania efektywnego hamiltonianu. Badanie tego typu korelacji stanowi główną i najważniejszą część pracy doktorskiej. W rozdziale piątym przedstawiono wyniki symulacji metodą Monte-Carlo. Na podstawie postulowanych funkcji falowych transformujących się zgodnie z modelem podgrup cyklotronowych wyznaczono wartość oczekiwaną energii potencjalnej, gęstości jednocząstkowej oraz korelacji dwucząstkowych. Wyniki zastosowanego algorytmu całkowego Monte-Carlo Metropolis są odniesione do wyników dokładnej diagonalizacji, traktowanej tutaj jako wzorzec. Badany układ ma geo-

metrię dysku, a uwzględnione sprzężenia ograniczają się jedynie do oddziaływania elektron-elektron i naturalnie do oddziaływanie z jednorodnie naładowanym tłem. Dzięki temu układ maksymalnie odpowiada sytuacji eksperymentalnej. Energia potencjalna otrzymana przez autorkę z dużą dokładnością odtwarza wyniki dokładnej diagonalizacji dla wszystkich badanych współczynników wypełnienia, również enigmatycznych. Może to świadczyć o tym, że model podgrup cyklotronowych pozwala prawidłowo “odgadnąć” postać funkcji falowej skorelowanego układu elektronowego w reżimie ułamkowego kwantowego efektu Halla. Badanie dwucząstkowej funkcji korelacji ujawniło istnienie uskoku w obszarze dziury korelacyjwymiany, która może się wiązać formowaniem się klastrów fermionowych - również w zgodzie z dokładną diagonalizacją. Znajomość funkcji falowej układu pozwoliła na stwierdzenie, że w najbardziej prawdopodobnej konfiguracji cząstki lokalizują się na sieci.

Ciekawa dyskusja dotycząca ujawniania korelacji wyższego rzędu między cząstkami zawiera się w rozdziale 6. Autorka zastosowała tutaj zmodyfikowaną metodę symulowanego wyżarzania i stopniowej poprawy do wyznaczania optymalnej konfiguracji cząstek przy zadanej wielocząstkowej funkcji falowej. Dzięki wprowadzeniu nowatorskiej miary możliwe było wprowadzenie gęstości prawdopodobieństwa w przestrzeni konfiguracji. Wykazano, w pobliżu zapelnień z hierarchii Laughlina najbardziej prawdopodobne konfiguracje przypominają klasyczne kryształy Wignera.

Rozprawa świadczy o głębokim zrozumieniu przez autorkę zagadnień związanych z kwantowym efektem Halla i ogólniej, dotyczących topologii skorelowanych układów dwuwymiarowych. Zwraca uwagę szeroka erudycja autorki o czym świadczy bogata bibliografia. Należy podkreślić, że wykazała ona dużą pomysłowość w realizacji symulacji Monte Carlo w oparciu o postulowaną postać wielocząstkowej funkcji falowej. Chociaż strona edytorska rozprawy jest bez zarzutu, chciałbym przedstawić kilka uwag o charakterze formalnym. Jak już wspominałem pewne fragmenty pracy czyta się znakomicie. Miejscami jednak nasycone szczegółami technicznymi znacznie utrudnia zrozumienie idei przewodniej. Wydaje się, że znaczna część materiału mogłaby być umieszczona w dodatkach. Dotyczy to głównie rozdziału czwartego i szóstego. Druga uwaga dotyczy interesującej składni, rzadko spotykanej w publikacjach naukowych, polegającej na częstym powtarzaniu głównej tezy zdania w wersji skróconej, po średniku. Przypomina to trochę echo i nie zawsze ułatwia lekturę. Wreszcie jeszcze jeden przykład “skrótów myślowego”, jednego z tych, o których już wspominałem. Na stronie 115 autorka stwierdza, że aby ujawnić korelacje położeniowe należy znaleźć konfigurację która minimalizuje kwadrat funkcji falowej. Po odwróceniu kartki oraz w dalszym tekście okazuje się, że chodzi jednak o metodę maksymalizacji tegoż i oczywiście przedstawiona dyskusja jest w pełni spójna z tym stwierdzeniem. Czy coś mi tutaj umknęło?

Pomijając drobne uwagi formalne stwierdzam jednak, że wyniki zawarte w rozprawie

są istotne z punktu widzenia fizyki kwantowego efektu Halla i zasługują na wyróżnienie. Ważnym osiągnięciem autorki jest wykazanie, że zastosowanie analizy symetrii stanów skorelowanych w kwantowym efekcie Halla w ramach modelu podgrup cyklotronowych grupy warkoczowej może mieć istotne znaczenie praktyczne dla analizy korelacji międzycząstkowych, co wynika niezbieżnie z przeprowadzonych symulacji Monte Carlo.

Uważam zatem, że rozprawa doktorska mgr inż. Patrycji Łydźby spełnia wszelkie warunki niezbędne do dopuszczenia do publicznej obrony.

Warszawa, 23 czerwca 2019 r.



prof. dr hab. Witold Bardyszewski