Łódź, dn. 23 lipca 2018 r.

Prof. dr hab. Marek Balcerzak
Instytut Matematyki
Politechniki Łódzkiej

Recenzja pracy doktorskiej Pana mgra inż. Marcina Michalskiego pt. „Podzbiory grup i przestrzeni polskich związane ze strukturą algebraiczną oraz mierzalnością względem różnych ideałów"

Omówienie treści rozprawy

Recenzowana rozprawa doktorska składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów, bibliografii oraz dwóch skorowidzów. Rozdział 1 zawiera preliminaria, w których omówione zostały podstawowe pojęcia badane w kolejnych rozdziałach. Autor przytoczył definicje, podstawowe własności stosowanych pojąć oraz komentarze. Zamieszczony tu materiał został podzielony tematycznie według zagadnień rozważanych w zasadniczej części pracy.

Rozdziały 2 i 3 przedstawiają wyniki o największym, moim zdaniem, ciężarze gatunkowym. Obiektem badań Rozdziału 2 są zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina, gdzie $\mathcal{I}$ jest ideałem podzbiorów przestrzeni polskiej. Najczęściej zakłada się istnienie struktury algebraicznej tej przestrzeni lub po prostu rozważa się przestrzeń euklidesową. Uzyskano wiele interesujących twierdzeń, w których pokazano nietrywialne własności i konstrukcje z wykorzystaniem różnych, często zaawansowanych technik dowodowych. Zbadano np. sytuacje, gdy:

- zbiór $\mathcal{I}$-Łuzina jest $\mathcal{I}$-niemierzalny;
- pojawia się rozkład przestrzeni na zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina;
- suma algebraiczna $L + L$ zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina L ze sobą ma pewne "zaskakujące" własności, np. jest cała przestrzenią, jest równa L, jest zbiorem Bernsteina.

W Rozdziale 3 rozważane są ideały drzewiaste na ω^ω generowane przez odpowiednie rodziny drzew doskonałych. Pokazano istnienie odpowiednich zbiorów Bernsteina należących do m_0 i s_0 (Twierdzenie 3.6) z wykorzystaniem ciekawego pomysłu z pracy Brendlego. W pewnym sensie "nowym" ideałem jest ideał cl_0 generowany przez zupełne drzewa Lavera. Wykazano, że żaden z ideałów m_0, l_0 nie zawiera się w cl_0 (Twierdzenie 3.3). W drugiej części Rozdziału 2 ideały drzewiaste odgrywają ważną rolę w uzyskaniu kolejnych własności algebraicznych zbiorów typu Łuzina. Otóż okazuje się, że przy założeniu regularności mocy continuum, suma algebraiczna $L + S$ dowolnego uogólnionego zbioru Łuzina L oraz dowolnego uogólnionego zbioru Sierpińskiego S należy do każdego spośród ideałów drzewiastych s_0, m_0, l_0, cl_0 (Twierdzenie 3.16). Długi nietrywialny dowód tego faktu rozbity został na kilka etapów. Zastosowano w nim m.in. metodę fuzji budowania odpowiednich drzew.

Wyniki Rozdziałów 2 i 3 oparte są na współautorskich pracach [31], [32]. Domyślam się, że wiedza i doświadczenie współautorów mogły tu być bardzo pomocne. Brakuje mi komentarza, w jakim stopniu materiał zamieszczony w Rozdziale 2 różni się od zawartości artykułu [31]. Zauważyłem, że w pracy [31] często zakłada się Hipotezę Continuum, zaś w rozprawie pojawiają się nieco słabsze założenia. W artykule [31] nie ma rezultatu opisanego w Twierdzeniu 2.24 – to oczywiście działa na korzyść Doktoranta. (Przy okazji zwracam uwagę na błąd w pisowni nazwiska van Engelen - w pracy pominięto słówko "van".) Z kolei porównując zawartość Rozdziału 3 i pracy [32], zauważyłem że ostatnia część preprintu [32] nie weszła w skład rozprawy.

Rozdziały 4 i 5 przedstawiają wyniki lżejszego kalibru, które jednakże są interesujące i wymagały od Autora sporo pracy i umiejętności. Rozdział 4 dotyczy zbiorów uniwersalnych dla baz borelowskich wybranych σ-ideałów. Takie zbiory uniwersalne zostały skonstruowane w Twierdzeniu 4.2. Dowód zawiera formalne konstrukcje, które z wyjątkiem ideałów miary i kategorii rozważanych przez Recława i Pawlikowskiego, nie pojawiły się zapewne wcześniej w publikacjach. Pomysłowa jest także metoda budowania zbiorów uniwersalnych zaproponowana w Lemacie 4.1 i wykorzystana potem we Wniosku 4.6 dla odpowiednich ideałów produktowych. Twierdzenie 1.33 zamieszczone w Rozdziale 1 stanowi pewnego rodzaju motywację podjęcia tej tematyki.

Zawartość Rodziału 5 wiąże się z mało znanym twierdzeniem Łuzina-Novikova z 1934 roku o rozkładzie dużego podzbioru prostej na dwa pełne zbiory, w wersji miary i kategorii. Autor rozprawy przytoczył własny kompletny dowód tego twierdzenia. Już wcześniej wiedziałem, że Doktorant zainteresował się tym zapomnianym rezultatem, gdyż wysłuchałem jego referatu na ten temat na III Warsztatach z Analizy Rzeczywistej w Konopnicy w 2017 roku. Tak się złożyło, że w tym samym czasie odtworzeniem oryginalnego dowodu twierdzenia Łuzina-Novikova zajęli się Grzegorek i Labuda. Obie strony wiedziały o tym fakcie i uczciwie o nim informowały. Dowód dla kategorii zamieszczony w Rozdziale 5 omawianej rozprawy zawiera ciekawy element autorski w postaci Lematu 5.2, który jest wersją własności Fubiniego bez założenia odpowiedniej mierzalności zbioru na płaszczyźnie.

Ocena rozprawy

Moja ocena rozprawy jest jednoznacznie pozytywna. Podoba mi się większość wysublimowanych rezultatów uzyskanych w Rozdziałach 2 i 3 oraz różnorodność zastosowanych tam metod dowodowych. Na uznanie zasługuje zręczne użycie indukcji pozaskończonej oraz skuteczne wejście w świat dość złożonych struktur drzewiastych. Ładnym narzędziem (zastosowanym dwukrotnie) jest twierdzenie Shoenfielda o absolutności. Nawiasem mówiąc, szkoda że nie zostało ono zacytowane w Rozdziale 1. Rezultaty Rozdziałów 4 i 5 są również wartościowe. Mam odczucie, że w tej części pracy w pełni widoczne są samodzielne poczynania Doktoranta. Oceniając całość rozprawy, z uznaniem odnoszę się do opanowania przez autora wielu pojęć i metod z zakresu aksjomatycznej i deskryptywnej teorii mnogości oraz kombinatoryki nieskończonej, a także do jego wiedzy wokół zbiorów małych i ich własności algebraicznych. Niewątpliwym osiągnięciem tego doktoratu jest wyeksponowanie nowych możliwości badawczych związanych z ogólnym spojrzeniem na klasyczne pojęcie zbioru Łuzina.

Widać, że Autor włożył dużo wysiłku w celu wyjaśnienia argumentacji i trudniejszych przejść dowodowych. Nie w pełni przekonało mnie uzasadnienie problemów, które pojawiają się na str. 15 przy wyborze przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla $n > 1$ w twierdzeniach dotyczących sumy $L + S$ należącej do ideałów drzewiastych. Równość $(C \times \{0\}) + (\{0\} \times C) = [0,1]^2$ na str. 15_6 w sposób oczywisty nie zachodzi – autor miał zapewne na myśli sumę $(C \times C) + (C \times C)$. Brakuje mi wyjaśnienia dotyczącego formuły Σ^1_2 na str. 41 i odnoszącego się do kwantyfikatora "$\exists B$ miary zero typu G_δ". Trochę niezręczny wydaje się komentarz nt. formuły na str. 34^7, gdzie zmienna x jest pod kwantyfikatorem, a potem pojawia się inkluzja $(x + A) \subseteq G$ bez kwantyfikatora. W pierwszej chwili miałem kłopot z interpretacją symbolu $[I_\xi]$ w wywodzie poprzedzającym Lemat 5.2 na str. 54. Analogiczny symbol oznaczał wcześniej zbiór bazowy lub ciało drzewa, ale tu znaczenie symbolu jest inne. Odnalazłem je, powracając do Definicji 1.4 na str. 6 – była to otoczka mierzalna.

Dość swobodny styl rozprawy niewątpliwie ułatwia jej czytanie i powoduje pewnego rodzaju odformalizowanie wywodów. Jednakże momentami styl ten wykracza poza ogólnie przyjęte ramy poprzez niezbyt fortunne użycie zwrotów nadmiernie emocjonalnych lub nie bardzo pasujących do danej sytuacji. Oto kilka przykładów: "przestrzeń uzbrojona w topologię" (str. 3), "frywolność w nazewnictwie" (dotyczy nazwy "super zbiór $\mathcal{J}$-Łuzina", str. 10), "z odwagą i dla większej chwały sięgamy po prostą rzeczywistą (str. 15), "h_0 i ch_0 wymykają się powyższej charakteryzacji" (str. 39), "upragnionym zbiorem jest" (str. 29), "wyłaniający się ciąg fuzyjny" (str. 42), "założenia o regularności nie można porzucić" (str. 45), "dokonamy konstrukcji" (str. 47), "frywolny język" (komentarz dotyczący artykułu Łuzina [25] na str. 53).

W rozprawie występują drobne usterki gramatyczne, np. dwukrotne użycie słowa "to" po słowie "jeśli" (str. 40^{11-12}), brak zwyczajowego słowa "więc" po słowie "ponieważ" w kilku miejscach (str. 23_6, 31^9, 37_{15}, 56_4), brak słowa "to" po słowie "jeśli" czyni zdanie na str. 12^{11} niezrozumiałym, na str. 13^{19} zamiast "potrzebujemy argument" powinno być "potrzebujemy "argumentu". Pominę wyliczenie kilku błędów interpunkcyjnych (brak przecinków lub kropek) oraz z obowiązku recenzenta wspomnę o paru typowych literówkach (str. 11_6, 14^8, 16^9 – powinno być "nie większą", 21_9, 25^{10}, 28^{17}, 37_9 – "każde jabłoń"). Słowo "pociąga" na str. 21 i 23 powinno, moim zdaniem, być zastąpione przez "pociąga za sobą". Kolejne dwie niezręczności to "moc jest mocy" (str. 24^{14-15}) oraz "Aby się o tym przekonać w przypadkach" (str. 14^{14}).

Pewne zakłopotanie powodują literówki we wzorach matematycznych, ale na szczęście można się domyślać, w jaki sposób te usterki dają się naprawić. Dotyczy to Uwagi 2.9 (i) (powinna być niepustość przecięcia), na str. 26^{11} (brak symbolu mocy zbioru), dowód Twierdzenia 2.26 (warunek (i)), brak znaku nierówności $k > n$ na str. 40^4, dowód Faktu 3.2 (powinno być C_0 zamiast $[C_0]$).

Konkluzja

Pomimo powyższych uwag krytycznych nie mam żadnych wątpliwości, że przedstawiona rozprawa spełnia wymagania ustawowe, w szczególności stanowi oryginalne rozwiązanie istotnych zagadnień naukowych, a jej autor wykazał się odpowiednią wiedzą teoretyczną i umiejętnością samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Wnoszę zatem o dopuszczenia rozprawy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

M. Balcerzak