RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ „PODZBIORY GRUP I PRZESTRZENI POLSKICH ZWIĄZANE ZE STRUKTURĄ ALGEBRAICZNĄ ORAZ MIERZALNOŚCIĄ WZGLĘDEM RÓŻNYCH IDEAŁÓW" AUTORSTWA MGR MARCINA MICHALSKIEGO

Ocena rozprawy

Recenzowana rozprawa dotyczy pewnych zagadnień związanych ze strukturą algebraiczną oraz mierzalnością podzbiorów grup i przestrzeni polskich. Wyniki przedstawione w pracy dotyczą m.in.

- zbiorów Łuzina,
- ideałów drzewiastych,
- zbiorów uniwersalnych oraz
- podziałów zbiorów na duże części.

Uzyskane wyniki pokazują, że rozprawa stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego. Badania rozważanych zagadnień przeprowadzono używając różnorodnych metod matematycznych, w tym metod teorii mnogości, algebry liniowej, logiki matematycznej, topologii i teorii miary. W szczególności doktorant używa:

- indukcji pozaskończonej,
- zbiorów liniowo niezależnych nad ciałem liczb wymiernych,
- forcingu,
- schematu Cantora,
- twierdzenia Shoenfielda o absolutności oraz
- zbiorów uniwersalnych.

Zastosowanie rozmaitych metod pokazuje, że autor wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną w dyscyplinie matematyka. Zagadnienia badane przez doktoranta wpisują się w tematykę rozważaną przez innych matematyków, a wyniki umieszczone w rozprawie pokazują, że autor posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

W mojej ocenie rozprawa spełnia wszystkie warunki konieczne do uzyskanie stopnia doktora nauk matematycznych zawarte w ustawie.

Szczegółowe uzasadnienie oceny

Omówienie rozdziału 1. W rozdziale 1 autor umieścił definicje, oznaczenia i fakty niezbędne do przedstawienia i udowodnienia wyników z dalszej części rozprawy.

Na stronie 4 autor definiuje otoczkę liniową w przestrzeni liniowej nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$, ale w całej pracy używa tylko przestrzeni liniowej nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

Na stronie 6 autor definiuje ideał $\mathcal{I}$ w przestrzeni X i pisze, że *zawsze* będzie zakładał, że

(1) $\mathcal{I}$ zawiera wszystkie singletony oraz
(2) $\mathcal{I}$ ma bazę borelowską.

Zaiste autor korzysta z takiej definicji ideału, bo na przykład w sformułowaniu twierdzenia 1.15 nie umieszcza założenia o bazie borelowskiej, a w dowodzie wykorzystuje istnienie takiej bazy. Jednakowoż

(1) na stronie 17 autor używa rodziny $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$ jako ideału,
(2) na stronie 12 autor definiuje ideały drzewiaste, które nie mają bazy borelowskiej.

Na stronie 7 autor definiuje pojęcie $\mathcal{I}$-mierzalności dla dowolnego ideału $\mathcal{I}$, a na stronie 14 pojęcie $\mathcal{I}$-mierzalności dla ideałów drzewiastych. Niestety, te dwa pojęcia (mające taką samą nazwę) nie są równoważne.

Na stronie 9 autor powołuje się na pracę [1], żeby stwierdzić, że produkt Fubiniego ideałów mających WSP również ma WSP. Tymczasem w pracy [1] produkt Fubiniego ideałów jest zdefiniowany inaczej niż w recenzowanej rozprawie. W tamtej pracy produkt może być rodziną większą od produktu wprowadzonego w rozprawie (nie zakłada się tam istnienia borelowskiej „nakrywki"). Z drugiej strony łatwo zauważyć, że większym ideałom „łatwiej" mieć WSP. Powstaje pytanie, czy produkty rozważane w rozprawie mają własność „produktowania WSP"?

Omówienie rozdziału 2. W rozdziale 2 autor przedstawił twierdzenia związane ze zbiorami $\mathcal{I}$-Łuzina tzn. zbiorami L, których ślady na każdym zbiorze z $\mathcal{I}$ są mocy mniejszych od mocy zbioru L. W przypadku, gdy $\mathcal{I}$ jest ideałem zbiorów pierwszej kategorii otrzymujemy dobrze znany z literatury uogólniony zbiór Łuzina, a gdy $\mathcal{I}$ jest ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero otrzymujemy uogólniony zbiór Sierpińskiego. Zbiory Łuzina i Sierpińskiego cały czas są badane i wykorzystywane przez matematyków, a zagadnienia podobne do rozważanych w recenzowanej rozprawie pojawiały się już w literaturze (np. u Bukovskiego [4] i Millera [11]).

W pierwszej części rozdziału 2 autor zajmuje się mierzalnością zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina. Na początku doktorant zauważa, że jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem zbiorów przeliczalnych, to istnieje $\mathcal{I}$-mierzalny zbiór $\mathcal{I}$-Łuzina. Następnie podaje przykład „ciekawszego" ideału $\mathcal{I}$ mającego analogiczną własność (przykład ten wymagał dość skomplikowanej konstrukcji pewnych zbiorów doskonałych). Niestety autor nie napisał dlaczego ten drugi ideał jest „ciekawszy" od ideału zbiorów przeliczalnych. Gdyby „ciekawszą" własnością miałoby być istnienie zbioru doskonałego w ideale oraz doskonałego zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina, to wystarczyłoby wziąć σ-ideał na płaszczyźnie generowany przez proste pionowe.

Fdy

W rozdziale 2 autor podaje również lemat 2.1, który wykorzystuje później kilkukrotnie. Dowód tego lematu jest technicznie skomplikowany i wymagał od autora biegłości w konstruowaniu odpowiednich zbiorów doskonałych przy pomocy schematów Cantora.

W twierdzeniu 2.4 autor udowodnił, że każdy zbiór $\mathcal{I}$-Łuzina jest $\mathcal{I}$-niemierzalny dla ideałów mających WSP, a w twierdzeniu 2.5 pokazał, że niemierzalność każdego zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina jest równoważna z tym, że ideał jest wysoki. Następnie autor analizuje ideały wysokie i ideały z WSP.

Tę część rozdziału 2 kończy twierdzenie mówiące, że jeżeli ideał $\mathcal{I}$ ma WSP, to istnienie zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina implikuje istnienie super zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina (tzn. zbioru który jest zbiorem $\mathcal{I}$-Łuzina w każdym $\mathcal{I}$-dodatnim zbiorze borelowskim). Zagadnienie konstrukcji super zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina ze zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina było wcześniej badane przez Brzuchowskiego, Cichonia i Węglorza w pracy [3, Proposition na stronie 220], gdzie autorzy pokazali, że dla przeprowadzenia takiej konstrukcji wystarczy założyć, że odpowiednia algebra ilorazowa jest jednorodna i ma ccc — szkoda, że doktorant nie pokazał jaki jest związek tych założeń z rozważaną przez niego WSP.

W drugiej części rozdziału 2, autor zajmuje się rozkładem $\mathbb{R}^n$ na

(1) zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina (twierdzenie 2.17),
(2) przesunięcia jednego zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina (twierdzenie 2.19),
(3) przesunięcia jednego zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina o wektory będące elementami innego zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina (twierdzenie 2.21).

Przydatnym narzędziem w tych badaniach okazują się zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina, które są liniowo niezależne nad ciałem liczb wymiernych. Zbiorami takimi zajmowano się już wcześniej. Na przykład Brzuchowski, Cichoń i Węglorz [3, Lemma 1] pokazali, że dla pewnych ideałów $\mathcal{I}$ istnieje baza Hamela, która jest super zbiorem $\mathcal{I}$-Łuzina. W rozprawie autor stara się udowodnić analogiczne twierdzenie przy najsłabszym możliwym założeniu, mianowicie przy założeniu istnienia jakiegokolwiek zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina. W punkcie (i) lematu 2.13 autor dowodzi, że istnienie zbiorów $\mathcal{I}$-Łuzina implikuje istnienie liniowo niezależnego nad $\mathbb{Q}$ zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina (niekoniecznie bazy Hamela), a w punkcie (ii) doktorant chciał pokazać analogiczny wynik dla super zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina. Niestety dowód tego punktu jest niekompletny, ponieważ autor pisze, że przekrój super zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina mocy $\mathfrak{c}$ z dowolnym $\mathcal{I}$-dodatnim zbiorem borelowskim jest mocy $\mathfrak{c}$ (wiersz 14 na stronie 24: $|L \cap B_\gamma| = \mathfrak{c}$) — moim zdaniem stwierdzenie takie należałoby uzasadnić.

W trzeciej części rozdziału 2 autor konstruuje całkowicie $\mathcal{I}$-niemierzalny podzbiór płaszczyzny, którego przekrój z każdą prostą jest zbiorem $\mathcal{I}$-Łuzina. Dość długi dowód tego twierdzenia wykorzystuje indukcję pozaskończoną oraz pewne twierdzenie Engelenna, Kunena i Millera. Sam dowód został podzielony na dwie części, przy czym druga część dowodu jest istotnie trudniejsza od pierwszej.

W czwartej części rozdziału 2 autor konstruuje zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina mające rozmaite własności algebraiczne (na przykład sumy algebraiczne takich zbiorów są całą

Filg

przestrzenią lub są zbiorami Łuzina). Konstrukcje są przeprowadzone indukcją pozaskończoną i wykorzystują zbiory liniowo niezależne nad ciałem liczb wymiernych. W jednej z konstrukcji autor wykorzystuje forcing, żeby pokazać, że istnienie zbioru Łuzina, który jest podprzestrzenią liniową jest niesprzeczne z negacją hipotezy continuum.

W ostatniej części rozdziału 2 autor konstruuje uogólniony zbiór Łuzina L taki, że $L + L$ jest zbiorem Bernsteina. Konstrukcja jest przeprowadzona indukcją pozaskończoną, a poprawność kroku indukcyjnego jest wykazana przy pomocy pewnego ciekawego lematu z pracy [8].

Omówienie rozdziału 3. W rozdziale 3 autor zajmuje się ideałami drzewiastymi. Najbardziej znanym przykładem ideału drzewiastego jest ideał s_0 wprowadzony przez Marczewskiego [16] w latach 30 XX wieku. Pozostałe ideały drzewiaste są związane z częściowymi porządkami (forcingami) wprowadzonymi przez Lavera i Millera. Dokładne omówienie różnych ideałów drzewiastych można znaleźć w pracy Brendlego [2], gdzie pokazano m.in. że nie ma żadnych zawierań między ideałami s_0, l_0 i m_0. W recenzowanej rozprawie autor pokazał, że ideał cl_0 (generowany przez zupełne drzewa Lavera) nie zawiera w sobie ideałów m_0 i s_0. W dowodzie tego twierdzenia autor używa pojęcia jabłoni i grusz, które są pewnymi rodzajami drzew doskonałych i zostały wprowadzone przez Brendlego (niestety w rozprawie nie zostały podane definicje tych drzew). Następnie, wykorzystując brak zawierań między różnymi ideałami, autor pokazuje, że istnieją zbiory mierzalne względem jednych drzew i niemierzalne względem innych (dodatkowo autor pokazuje, że takie zbiory mogą być zbiorami Bernsteina względem odpowiednich drzew).

W drugiej części rozdziału 3 autor zajmuje się własnościami algebraicznymi zbiorów z ideałów drzewiastych. Badania takie były wcześniej prowadzone przez innych matematyków. Na przykład Kysiak [10] wykazał, że istnieje zbiór $A \in s_0$ taki, że $A + A$ nie jest s-mierzalny, a Dorais i Filipów [5] pokazali, że istnieje zbiór $A \in m_0$ taki, że $A + A$ nie jest m-mierzalny.

Głównym celem tego rozdziału jest zbadanie sumy algebraicznej uogólnionego zbioru Łuzina i uogólnionego zbioru Sierpińskiego. Autor pokazał, że

- (twierdzenie 3.19) zakładając regularność $\mathfrak{c}$ suma algebraiczna $L + S$ jest zbiorem małym w sensie ideałów drzewiastych rozważanych w rozprawie tzn. $L + S \in s_0 \cap m_0 \cap l_0$ dla dowolnego uogólnionego zbioru Łuzina L i uogólnionego zbioru Sierpińskiego S,
- (twierdzenie 3.20) jest niesprzeczne z ZFC, że $L + S \notin s_0 \cup m_0 \cup l_0$ dla pewnego uogólnionego zbioru Łuzina L i uogólnionego zbioru Sierpińskiego S.

Fil

Dowód twierdzenia 3.19 jest poprzedzony kilkoma lematami, których dowody wymagał od autora dużej biegłości w konstruowaniu odpowiednich drzew doskonałych, a dowód twierdzenia 3.20 wykorzystuje forcing. W dowodzie jednego z lematów autor wykorzystał również twierdzenie Shoenfielda o absolutności.

Warto dodać, że sumami algebraicznymi zbiorów małych zajmowali się również Nowik, Scheepers i Weiss w pracy [12]. Pokazali oni tam, że dla dowolnego zbioru silnie miary zero A oraz dowolnego zbioru silnie pierwszej kategorii B mamy $A + B \in s_0$. Wiadomo, że każdy zbiór Łuzina L jest silnie miary zero, a każdy zbiór Sierpińskiego S jest silnie pierwszej kategorii (ten ostatni wynik został pokazany przez Pawlikowskiego w 1996 roku), więc $L + S \in s_0$. W 1988 Judah [7] pokazał, że uogólniony zbiór Łuzina jest silnie miary zero przy założeniu, że $\mathfrak{c}$ jest regularne. Powstaje pytanie czy każdy uogólniony zbiór Sierpińskiego jest silnie pierwszej kategorii przy założeniu, że $\mathfrak{c}$ jest regularne? Gdyby tak było otrzymalibyśmy inny dowód twierdzenia 3.19 z rozprawy.

Omówienie rozdziału 4. W rozdziale 4 autor przedstawił konstrukcję zbiorów uniwersalnych dla pewnych ideałów. Przypomnijmy klasyczny wynik mówiący, że dla rodziny zbiorów borelowskich klasy α istnieje zbiór uniwersalny takiej samej klasy. Wykorzystując ten fakt autor pokazuje, że dla ideałów mających bazę borelowską klasy α, które są $\mathcal{B}$-na-Σ^1_1 istnieje zbiór uniwersalny tej samej złożoności borelowskiej. Twierdzenia o istnieniu zbiorów uniwersalnych dla ideałów zbiorów miary Lebesgue'a zero i zbiorów pierwszej kategorii zostały wcześniej wykazane przez Pawlikowskiego i Recława [13].

W dalszej części rozdziału 4 autor wykazuje istnienie zbiorów uniwersalnych dla innych ideałów m.in. ideału zbiorów przeliczalnych, ideału generowanego przez domknięte zbiory miary zero, ideału generowanego przez zbiory σ-zwarte i ideału drzewiastego Lavera.

W ostatniej części rozdziału 4 autor pokazuje, że niektóre ideały produktowe (np. $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$) również mają zbiory uniwersalne.

Omówienie rozdziału 5. W rozdziale 5 autor omawia twierdzenie dotyczące rozkładania podzbiorów prostej na dwa pełne w nim (w sensie miary lub kategorii) podzbiory. Doktorant przypisuje to twierdzenie Łuzinowi oraz Nowikowowi. Jednakże czytając uwagi końcowe w pracy Grzegorka i Labudy [6, str. 643] należy chyba przyjąć, że twierdzenie takie trzeba przypisać Sierpińskiemu.

Doktorant twierdzi, że podaje inny dowód wspomnianego twierdzenia, a istotnym krokiem w dowodzie jest udowodnienie przez niego, że para $(\mathcal{M}, NWD)$ ma własność Fubiniego. Warto dodać, że własność Fubiniego par ideałów, która jest interesująca sama w sobie, została dokładnie omówiona w dwóch pracach Recława i Zakrzewskiego [15, 14].

Biorąc pod uwagę, że w prawie całej rozprawie doktorant omawia różne rodzaje mierzalności, szkoda, że nie pokusił się on o zbadanie analogicznej własności „rozkładania zbiorów na duże części" dla innych rodzajów mierzalności.

Fil

Błędy edytorskie. W poniższej liście zapis x^y (odpowiednio x_y) oznacza wiersz numer y od góry (odpowiednio od dołu) na stronie numer x.

(1) 1_{12} Powinno być „generowania" zamiast „generowanie".
(2) 4^2 Powinno być „nigdziegęstych" zamiast „niegdziegęstych".
(3) 4^5 Powinno być „w nieprzeliczalnej" zamiast „nieprzeliczalnej".
(4) 5^9 Powinno być „nazwiemy zbiór" zamiast „nazwiemy domknięcie kuli otwartej" – inaczej całe zdanie będzie nieprawdziwe.
(5) 7^{17} Powinno być „w przestrzeni" zamiast „przestrzeni".
(6) 7^{15} Powinno być „$B_\alpha \times Y$" zamiast „$B_\alpha \times X$".
(7) 7_7 Powinno być „zbioru mierzalnego" zamiast „zbioru".
(8) 8^2, 8^8 Niepotrzebny odstęp przed przecinkiem.
(9) 9^8, 10^2, 10_{16} Powinno być „taki, że" zamiast „że".
(10) 11_6 Powinno być „jest" zamiast „jet".
(11) 12^{15} Powinno być „W_{n+1}" zamiast „$W_n + 1$".
(12) 12^{23} Powinno być „jest drzewem" zamiast „drzewem".
(13) 12_9 Powinno być „$[T']$" zamiast „$[T]$".
(14) 13_4, 41_5 Powinno być „takie, że" zamiast „że".
(15) 16_5 Powinno być „następującego" zamiast „nastepującego".
(16) 17_9 Powinno być „jest bazą" zamiast „bazą".
(17) 19^9 Powinno być „będą zbiorami" zamiast „zbiorami".
(18) 19^{20} Powinno być „jest co najwyżej jednoelementowy" zamiast „jest jednoelementowy" – inaczej lemat 2.1 jest fałszywy.
(19) 20^{12} Powinno być „doskonały" zamiast „doskonały doskonały".
(20) 21_9 Powinno być „$\mathfrak{c}$-cc pociąga" zamiast „$\mathfrak{c}$-ccpociąga".
(21) 22^{17} Powinno być „taki zbiór" zamiast „takie zbiory".
(22) 24^2 Powinno być „nad ciałem" zamiast „na ciałem".
(23) 24^7 Powinno być „super zbiór" zamiast „zbiór super zbiór".
(24) 27_5 Powinno być „A i B będą" zamiast „A będą B".
(25) 28_{19} Powinno być „płaszczyzny" zamiast „płszczyzny".
(26) 28_9 Powinno być „dla" zamiast „da".
(27) 33_{12} Powinno być „$\tilde{A}$ jest przeliczalnym" zamiast „$\tilde{A}$ przeliczalnym".
(28) 34^{13} Powinno być „również w" zamiast „w również w".
(29) 37_{11} Powinno być „zmodyfikujemy" zamiast „zmodyfukujemy".
(30) 37_9 Powinno być „każda jabłoń" zamiast „każde jabłoń".
(31) 45_{16-17} Powinno być „że zachodzi" zamiast „że którego zachodzi".
(32) 46_{13} Powinno być „uogólnionym" zamiast „uogólnioynm".
(33) 48_8, 49^4 Powinno być „$(\omega^\omega)^\omega$" zamiast „ω^{ω^ω}".
(34) 53_{17} Powinno być „nie jest jasne" zamiast „nie jasne".
(35) 56_9 Powinno być „będzie zbiorem o tej własności" zamiast „będzie o tej własności".
(36) 64_2 Powinno być „M. Sierpiński" zamiast „W. Sierpiński".

Literatura

1. Artur Bartoszewicz, Małgorzata Filipczak, and Tomasz Natkaniec, *On Smital properties*, Topology Appl. **158** (2011), no. 15, 2066–2075. MR 2825361
2. Jörg Brendle, *Strolling through paradise*, Fund. Math. **148** (1995), no. 1, 1–25. MR 1354935
3. Jan Brzuchowski, Jacek Cichoń, and Bogdan Węglorz, *Some applications of strong Lusin sets*, Compositio Math. **43** (1981), no. 2, 217–224. MR 622448
4. Lev Bukovský, *Generalized Luzin sets*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **51** (2010), no. suppl., 5–8. MR 2752954
5. François G. Dorais and Rafał Filipów, *Algebraic sums of sets in Marczewski-Burstin algebras*, Real Anal. Exchange **31** (2005/06), no. 1, 133–142. MR 2218194
6. Edward Grzegorek and Iwo Labuda, *On two theorems of Sierpiński*, Arch. Math. (Basel) **110** (2018), no. 6, 637–644. MR 3803752
7. Jaime I. Ihoda, *Strong measure zero sets and rapid filters*, J. Symbolic Logic **53** (1988), no. 2, 393–402. MR 947847
8. Jan Kraszewski, Robert Rałowski, Przemysław Szczepaniak, and Szymon Żeberski, *Bernstein sets and κ-coverings*, MLQ Math. Log. Q. **56** (2010), no. 2, 216–224. MR 2650240
9. Kenneth Kunen, *Random and Cohen reals*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 887–911. MR 776639
10. Marcin Kysiak, *Nonmeasurable algebraic sums of sets of reals*, Colloq. Math. **102** (2005), no. 1, 113–122. MR 2150273
11. Arnold W. Miller, *Special subsets of the real line*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 201–233. MR 776624
12. Andrej Nowik, Marion Scheepers, and Tomasz Weiss, *The algebraic sum of sets of real numbers with strong measure zero sets*, J. Symbolic Logic **63** (1998), no. 1, 301–324. MR 1610427
13. Janusz Pawlikowski and Ireneusz Recław, *Parametrized Cichoń's diagram and small sets*, Fund. Math. **147** (1995), no. 2, 135–155. MR 1341727
14. Ireneusz Recław and Piotr Zakrzewski, *Strong Fubini properties of ideals*, Fund. Math. **159** (1999), no. 2, 135–152. MR 1670087
15. ———, *Fubini properties of ideals*, Real Anal. Exchange **25** (1999/00), no. 2, 565–578. MR 1778511
16. Edward Szpilrajn, *Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles*, Fundamenta Mathematicae **24** (1935), no. 1, 17–34.

Rafał Filipów

Gdańsk, 1 września 2018 Rafał Filipów