

I N S T Y T U T   F I Z Y K I   T E O R E T Y C Z N E J  
U N I W E R S Y T E T   W A R S Z A W S K I  
UL. PASTEURA 5, 02-093 WARSZAWA

---

prof. dr hab. Witold Bardyszewski  
Instytut Fizyki Teoretycznej  
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski  
ul. Pasteura 5, 00-681 Warszawa

**Recenzja pracy doktorskiej mgr. Bartosza Kuśmierza**  
**pt.: “Applications of Symmetric Functions Theory to Many-Body Effects in**  
**Fractional Quantum Hall Systems.”**

Od chwili odkrycia ułamkowego efektu Halla przez Tsui, Störmera i Gossarda w 1982 roku upłynęło już prawie 40 lat. W dalszym ciągu zjawisko to jest źródłem inspiracji badań własności skorelowanych układów elektronowych w dwóch wymiarach. Dziedzina ta dopracowała się własnego języka wiążącego dwuwymiarowy charakter układu fizycznego z matematyczną teorią analitycznych funkcji wielu zmiennych zespolonych. Z uwagi na nieperturbacyjną rolę oddziaływania kulombowskiego w reżimie ułamkowego obsadzenia podstawowego i wyższych poziomów Landaua od samego początku wysiłki teoretyczne zmierzały do wyłonienia, optymalnej z punktu widzenia zasady wariacyjnej, wieloelektronowej funkcji próbnej. Kierunek poszukiwań wytyczył w roku 1983 R. Laughlin proponując swoją słynną funkcję falową dopasowaną do wypełnienia  $\nu = 1/3$  i ogólniej do tak zwanych wypełnień typu Laughlina postaci  $\nu = 1/(2s + 1)$ . Sześć lat później Jainendra Jain przedstawił model złożonych fermionów, który przynajmniej z punktu widzenia fenomenologii systematyzuje całą gamę obserwowanych wypełnień w ułamkowym efekcie Halla. Postulat Jaina, a w szczególności pomysł polegający na łączeniu elementarnych strumieni pola magnetycznego z położeniem cząstek uwypuklił związek wirów funkcji falowej z korelacjami między elektronowymi oraz z topologicznymi własnościami układu. Funkcje Read’a-Moora dla  $\nu = 5/2$ , czy bardziej ogólne stany Reazayi-Read’a zaproponowane dla  $\nu = 1/2$  stanowią dalszą wskazówkę, że kluczowa rolę w poszukiwaniach optymalnej funkcji falowej odgrywa analiza miejsc zerowych symetrycznych wielomianów wielu zmiennych zespolonych i ich związku z korelacjami między elektronowymi. Andrei Bernevig i Duncan Haldane w serii artykułów z początku lat dwutysięcznych postawili w pewnym sensie kropkę nad i zwracając uwagę na związek stanów ułamkowego efektu Halla z symetrycznymi funkcjami holomorficznymi, a konkretnie z wielomianami Jacka. W ten kontekst wpisuje się praca doktorska mgr. Bartosza Kuśmierza.

Rozprawa doktorska jest napisana w języku angielskim i liczy łącznie 180 stron. W pierwszej części autor przedstawia elementy teorii niezbędne do zrozumienia serii sześciu artykułów stanowiących część drugą rozprawy i zawierających oryginalne wyniki uzyskane przez autora. Dwa spośród tych artykułów są opublikowane w renomowanym Physical Review B, trzy ukazały się w materiałach po konferencyjnych w Acta Physica Polonica A, a jeden opublikowany w formie preprintu oczekuje na decyzję edytora Physical Review B. Pięć spośród włączonych artykułów jest dwu-autorskich, a jeden ma trzech autorów. We wszystkich przypadkach mgr. B. Kuśmierz jest pierwszy autorem. Z załączonego oświadczenia oraz z faktu, że doktorant włączył te artykuły jako integralną część swojej rozprawy wnioskując, że jego rola przy ich powstaniu była wiodąca.

Jak już wspomniano, licząca 106 stron pierwsza część dysertacji omawia elementy teorii ułamkowego efektu Halla niezbędne do zrozumienia oryginalnych dokonań autora. Ma ona duży walor dydaktyczny. Materiał jest dobrze przemyślany, a wykład logiczny. Każdy następny rozdział płynnie nawiązuje do materiału opisanego w rozdziale poprzednim. Dzięki temu czyta się tę część z prawdziwą przyjemnością. Wprowadzenie w rozdziale pierwszym zaczyna się jak można było oczekiwać od omówienia klasycznego i całkowitego kwantowego efektu Halla. Przedstawiono elementarny opis tego zjawiska za pomocą funkcji zmiennej zespolonej zastosowanego w wersji jednocząstkowej jak i w przypadku wielocząstkowej funkcji falowej nieoddziałujących elektronów. W tym formalizmie zdefiniowano ważne z punktu widzenia ogólnej teorii pojęcia kwazicząstki i kwazidziury. W rozdziale drugim omówiono ułamkowy efekt Halla wprowadzając między innymi kluczowe dla dalszej prezentacji pseudopotencjały Haldane'a i tzw. hamiltoniany rzutowe. W systematyczny sposób zaprezentowano najważniejsze funkcje próbne zaproponowane na przestrzeni lat do opisu tego zjawiska. Drobiazgowo omówiono wspomnianą już funkcję Laughlina, która ze względu na swoje intrygujące własności ciągle stanowi punkt odniesienia przy konstrukcji innych stanów ułamkowego efektu Halla. Przytoczono też funkcje Laughlina kwazicząstki i kwazidziury. Jedną z fenomenalnych własności funkcji Laughlina jest fakt, że odnosi się ona do stanu podstawowego układu oddziałującego krótkozasięgowym odpychającym potencjałem dwuciałowym, a mimo to zdumiewająco dobrze pokrywa się z wynikami numerycznej diagonalizacji z potencjałem kulombowskim. Autor zwraca uwagę na związek między funkcjami Laughlina oraz funkcją Moora-Read'a zaproponowaną dla zapełnienia  $\nu = 5/2$  i zawierającą dodatkowy czynnik w postaci pfaffianu pewnej macierzy, który niweluje niektóre zera w czynniku Laughlina-Jastrowa. Prowadzi do efektywnego osłabienia odpychania między elektronami, co można interpretować jako tendencję do parowania się elektronów. Stany pfaffianowe w odróżnieniu od stanów Laughlina są stanami podstawowymi dla krótkozasięgowego, odpychającego potencjału trójciałowego. Korelacje między położeniami cząstek w obu przypadkach są po-

glądowo zilustrowane na rysunku 2.3 dla stanów Laughlina  $\nu = 1/3$  i bozonowej funkcji Moora-Read'a na rys. 2.4. Zwraca uwagę silna zależność gęstości prawdopodobieństwa względnego rozkładu prawdopodobieństwa znalezienia cząstki od odległości od innej cząstki w przypadku funkcji Laughlina w porównaniu z funkcją pfaffianową, która dopuszcza parowanie cząstek. Autor omawia następnie logiczne rozszerzenie idei modelowych oddziaływań kontaktowych na przypadek oddziaływań  $k + 1$  - ciałowych wprowadzone przez Read'a i Rezayi dla wypełnienia  $\nu = k/(2 + k)$ . W tym przypadku konstrukcja funkcji falowej zakłada podział układu cząstek na  $k$ -cząstkowe grupy (klastry) skorelowane między sobą. Read i Rezayi wykazali, że ich model przewiduje zanikanie funkcji falowej z odległością przy zbliżaniu do siebie  $k + 1$  cząstek. Świetną ilustracją tej własności funkcji Read'a-Rezayi jest rysunek 2.5, na którym widać efekt grupowania trzech cząstek dla  $k = 3$  i antykorelacji przy zbliżaniu do siebie  $k + 1$  cząstek. Grupowanie cząstek prowadzi do zysku energetycznego w wyniku powstawania dziury korelacyjnej. Jako szczególne przypadki funkcji dla oddziaływań trójciałowych przedyskutowano również funkcje typu haffnian dla stanów fermionowych z  $\nu = 1/3$  i bozonowych z  $\nu = 1/2$  oraz funkcje typu gaffnian dla fermionów z  $\nu = 2/5$  and  $\nu = 2/3$  dla bozonów.

Omówienie modelu złożonych fermionów zaproponowanego przez J. Jaina kończy ten w pewnym sensie historyczny przegląd najpopularniejszych funkcji falowych dla ułamkowego efektu Halla. Na zakończenie rozdziału drugiego przedstawiono sformułowanie kwantowego efektu Halla na sferze Haldane'a stanowiące dogodną podstawę do obliczeń numerycznych.

W rozdział trzecim omówiono w sposób matematycznie rygorystyczny podstawowe własności wielomianów symetrycznych w zakresie wystarczającym do zrozumienia wyników drugiej części dysertacji. Podano związek między partycjami liczb naturalnych i wielomianami symetrycznymi oraz przytoczono kilka ważnych przykładów takich wielomianów i ich związków z funkcjami macierzy. Kluczowym pojęciem wykorzystywanym w tej analizie są relacje porządku w zbiorze partycji. W szczególności centralne dla rozprawy są wielomiany Jacka scharakteryzowane przez podanie partycji głównej oraz parametru deformacji. Przytoczono ważny wzór rekurencyjny na współczynniki rozkładu w bazie jednomianów o partycjach podporządkowanych partycji głównej. Związek tych wielomianów z ułamkowym kwantowym efektem Halla „odkryty” i opisany we wspomnianej serii prac Bernevig'a i Haldane'a polega na tym, że wiele rozpatrywanych do tej pory funkcji falowych można skojarzyć z wielomianami Jacka o odpowiedniej partycji głównej, a zatem zgodnie z tezą tych dwóch autorów zasadne jest poszukiwanie optymalnych rozwiązań wykorzystując własności stanów Jacka. Część pierwsza jest uzupełniona dwoma dodatkami. Jeden z nich dotyczy metod numerycznych stosowanych w obliczeniach, a drugi zawiera dowód na wyznacznikową postać wyznaczników Jacka. Dodatki można odczytać jako świadectwo biegłości doktoranta

zarówno w dziedzinie informatyki jak i na polu matematyki teoretycznej. Załączona bibliografia jest imponująca. Przy pierwszym czytaniu wydała mi się „nadzupelna” w tym sensie, że zawiera wiele odnośników do standardowych podręczników w kwestiach na ogół dość oczywistych - szczególnie we wstępnej części rozprawy. Pozytywnie oceniam jednak, że autor przytoczył ogromną liczbę artykułów oryginalnych dotyczących tematu rozprawy dowodząc w ten sposób swojej erudycji w tej dziedzinie.

Część druga rozprawy zawiera sześć artykułów zawierających oryginalne wyniki uzyskane przez autora.

Jak już wspomniano pewne stany, które można zidentyfikować jako stany Jacka opisujące ułamkowy efekt Halla wiążą się z  $k$ -ciałowym oddziaływaniem krótkozasięgowym. W artykule pierwszym porównano takie stany ze stanami odpowiadającymi dwuciałowemu pseudopotencjałom Haldane’a o niskim momencie pędu. Stwierdzono, że pseudopotencjały dwuciałowe z  $m < 5$  dość dobrze opisują kulombowski stan podstawowy. Następnie, analiza przekrycia stanów Jacka z dokładnymi stanami otrzymanymi dla dwuciałowych pseudopotencjałów Haldane’a pozwoliła na odkrycie cennej reguły wiążącej potencjały wielociałowe z optymalnymi kombinacjami pseudopotencjałów dwuciałowych. Jest to główny wynik tej pracy. Analizę przeprowadzono dla omawianych wcześniej stanów Laughlina, parafermionów, pfaffianów, gaffnianów i haffnianów. Okazuje się, że stany Jacka mogą z powodzeniem, acz w przybliżeniu opisywać stany wygenerowane przez odpychanie dwuciałowe. Artykuł robi imponujące wrażenie z uwagi na drobiazgowość z jaką przedyskutowano wszystkie rozważane przypadki oraz wysoki poziom rachunków numerycznych.

Artykuł drugi podobnie jak artykuł pierwszy został opublikowany w Physical Review B. Na przykładzie stanów Read-Rezayi zbadano własności stanów podstawowych dla krótkozasięgowego i długozasięgowego oddziaływania czterocząstkowego w ramach przybliżenia pola średniego. Stosując różne warianty teorii pola średniego wygenerowano pseudopotencjały dwucząstkowe charakteryzujące stany otrzymane dla potencjału czterocząstkowego. Otrzymane wyniki pozostają w zgodzie z poprzednio omawianym artykułem, w którym optymalne potencjały dwucząstkowe wyznaczono numerycznie. W szczególności odtworzono stosunki optymalnych pseudopotencjałów dwucząstkowych. W dodatku okazało się, że widmo dla oddziaływania trójciałowego w przybliżeniu średniego pola daje identyczny wynik (z dokładnością do stałych skalowania) jak procedura uśredniania cząstka-dziura. Wykazano też, że obserwacja ta nie dotyczy potencjałów więcej niż trójcząstkowych.

Krótki artykuł numer trzy jest doniesieniem konferencyjnym w pewnej mierze nawiązującym do poprzedniego artykułu, choć chronologicznie został opublikowany wcześniej. Tym razem analizowany jest stan Moore’a-Read’a typu pfaffian, który jest związany z oddziaływaniem trójciałowym i został zidentyfikowany jako jeden ze stanów Jacka. Okazuje się, że

przekrycie między stanami Moore'a-Read'a i stanami otrzymanymi w ramach pola średniego jest bardzo wysokie choć oczywiście zależne od rozmiaru układu. Porównanie ze stanem podstawowym dla oddziaływania kulombowskiego na pierwszym poziomie Landaua wypada trochę słabo i wyraźnie psuje się dla większych układów. Nie mniej autorzy konkludują, że funkcja typu pfaffian lepiej opisuje stan podstawowy niż pole średnie. Uzupełniłbym jednak to stwierdzenie uwagą, że przekrycie z wynikiem ścisłym jest jednak ciągle dość słabe.

Następny artykuł także jest doniesieniem konferencyjnym i podejmuje próbę systematycznego wyłonienia najlepszych kandydatów na wariacyjną funkcję falową ułamkowego efektu Halla spośród wielomianów Jacka. Dokładna diagonalizacja z oddziaływaniem kulombowskim służy do wyłonienia tzw. dominującej partycji (partycji podstawowej) charakteryzującej poszukiwany wielomian symetryczny. Zgodnie z oczekiwaniami proponowana metoda zadziałała dla stanu Laughlina natomiast w przypadku stanu odpowiadającego wypełnieniu  $\nu = 7/3$  w pierwszym wzbudzonym poziomie Landaua autorzy konkludują, że prawdopodobnie nie odpowiada mu konkretny wielomian Jacka lub Macdonalda, co też stanowi pewien wynik.

Artykuł numer pięć nie ukazał się jeszcze drukiem, ale prezentuje moim zdaniem najważniejsze wyniki rozprawy. Dotyczą one analizy rozkładu zer funkcji falowych, a dokładniej korelacji zer widzianych przez klaster p-cząstkowy w klastrze s-cząstkowym za pomocą tzw. wielomianów zredukowanych. W przypadku stanów Laughlina  $\nu = 1/3$ , czy stanów kwazi-cząstkowych Laughlina istnieje prosty związek między partycją podstawową odpowiadającą danemu stanowi i konfiguracją zer. Autorzy wykazali na przykładzie kwazidziury w modelu złożonych fermionów, że związek ten nie zachodzi w ogólności. Co więcej udowodnili, że dodanie małego zaburzenia typu potencjału kulombowskiego do krótkozasięgowego potencjału dla funkcji Laughlina powoduje odłączenie zer od cząstek zaburzając w ten sposób związek rozkładu zer z partycją podstawową.

Ostatni artykuł zamieszczony w części drugiej rozprawy, jest krótkim komunikatem konferencyjnym, w którym zaprezentowano analizę komutatorów obniżania i podnoszenia momentu pędu na sferze Haldane'a z czynnikami Jastrowa w odniesieniu do stanów analogicznych do złożonych fermionów. Umożliwia to ustalenie związku między stanami ekstremalnymi na sferze odpowiadającymi funkcjom symetrycznym i antysymetrycznym. Choć wynik ten wydaje się być czysto techniczny, to jednak wiąże się z poszukiwaniami optymalnych stanów Jacka, które zgodnie z Bernevigiem i Haldane'm powinny odpowiadać ekstremalnym wartościom momentu pędu na sferze Haldane'a.

Z powyższego opisu wynika, że rozprawa doktorska zawiera cenne wyniki teoretyczne uzyskane przez autora w dziedzinie ułamkowego efektu Halla. Świadczą one doskonałym opanowaniu trudnego warsztatu badawczego oraz o głębokiej erudycji autora

Jeśli chodzi o stronę stronę edytorską to nie mam żadnych zastrzeżeń. Znalazłem kilka drobnych literówek bez znaczenia. Język angielski rozprawy wydaje mi się bez zarzutu. Wspomnę jedynie drobne nieporozumienie w polskim streszczeniu. Pisząc, że funkcje falowe kwantowego efektu Halla mają postać ilorazu wielomianu antysymetrycznego/symetrycznego i funkcji gaussowskiej autor miał przypuszczalnie na myśli iloczyn tych funkcji.

W podsumowaniu stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr. Bartosza Kuśmierza spełnia wszelkie warunki stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Uważam też, że ze względu na wagę zawartych w niej wyników teoretycznych, które przyczyniły się do głębszego zrozumienia roli matematycznej teorii wielomianów Jacka w fizyce ułamkowego efektu Halla dysertacja ta zasługuje na wyróżnienie.

Warszawa, 27 listopada 2021 r.

prof. dr hab. Witold Bardyszewski