



UNIWERSYTET  
IM. ADAMA MICKIEWICZA  
W POZNANIU

WYDZIAŁ FIZYKI  
ZAKŁAD FIZYKI MEZOSKOPOWEJ

ul. Uniwersytetu Poznańskiego 2  
61-614 Poznań

prof. dr hab. Ireneusz Weymann

www: [weymann.home.amu.edu.pl](http://weymann.home.amu.edu.pl)  
email: [weymann@amu.edu.pl](mailto:weymann@amu.edu.pl)

---

**Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgra Andrzeja Więckowskiego  
pt. „Mody Majorany w jednowymiarowych układach z oddziaływaniami  
wielociałowymi”**

Rozprawa doktorska mgra inż. Andrzeja Więckowskiego pt. „Mody Majorany w jednowymiarowych układach z oddziaływaniami wielociałowymi” została przygotowana pod opieką prof. dr. hab. Marcina Mierzejewskiego oraz dra Bartłomieja Gardasa w Katedrze Fizyki Teoretycznej na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej. Tematyka podjęta w dysertacji dotyczy badania statycznych i dynamicznych własności fizycznych układów jednowymiarowych, w których mogą występować mody Majorany. Choć poszukiwania egzotycznych cząstek zapostulowanych przez Ettore Majoranę w 1937 roku nie zostały dotąd uwieńczone, fizyka ciała stałego daje możliwość eksploracji *quasi*-cząstek, mających cechy fermionów Majorany, w postaci zero-energetycznych modów, które powstają między innymi na końcach nanoskopowych drutów nadprzewodników topologicznych. Badania takich *quasi*-cząstek Majorany są obecnie intensywnie prowadzone w najlepszych ośrodkach naukowych na świecie, zarówno pod kątem teoretycznym, jak i doświadczalnym, co jest związane nie tylko z ekscytującymi zagadnieniami natury czysto poznawczej, ale także stymulowane przez potencjalne zastosowania w informatyce kwantowej. Zagadnienia poruszane w doktoracie wpisują się zatem w najnowszy nurt badań fizyki ciała stałego, a w szczególności w eksplorację własności fizycznych układów niskowymiarowych oraz stanów topologicznych. Do najważniejszych osiągnięć rozprawy można zaliczyć: (i) opracowanie metody pozwalającej na identyfikację modów Majorany dla dowolnych, skończonych hamiltonianów przy pomocy lokalnych całek ruchu, (ii) zbadanie wpływu oddziaływań dalekozasięgowych na lokalizację i czas życia modów Majorany oraz wykazanie ich destruktywnego charakteru, a także (iii) opracowanie koncepcji bramki kwantowej opartej na fazie geometrycznej bazującej na operacji splatania (ang. *braiding*) modów Majorany. Badania przedstawione w dysertacji dostarczają niewątpliwie nowej wiedzy oraz przyczyniają się do lepszego zrozumienia zachowania i własności stanów topologicznie chronionych, w szczególności modów Majorany, w układach niskowymiarowych oraz dają wkład do dalszego rozwoju topologicznej informatyki kwantowej. Rezultaty badań zostały przedstawione w trzech artykułach, z których jeden został opublikowany w *Physical Review Letters*, a dwa w *Physical Review B*.

Od strony formalnej rozprawa liczy 158 stron i składa się z czterech części. Pierwsza część, obejmująca trzy rozdziały, prezentuje wprowadzenie do tematyki dysertacji. Część druga, składająca się z kolejnych trzech rozdziałów, jest poświęcona omówieniu zastosowanych metod badawczych. Z kolei część trzecia, zawierająca trzy dalsze rozdziały, przedstawia oryginalne wyniki uzyskane przez Doktoranta. Po podsumowaniu, część czwarta, zawiera dodatki, w których przedstawiono informację o

autorze, wybrane dowody i wyprowadzenia wzorów z głównej części rozprawy oraz spisy: symboli, odnośników i rysunków. Dysertację zamyka obszerna bibliografia obejmująca 205 pozycji. Praca doktorska została przygotowana i zredagowana w sposób bardzo staranny i rzetelny. Widać, że autor włożył wiele wysiłku, by strukturę dysertacji uczynić przejrzystą, a opisy i wyprowadzenia są przedstawione w czytelny sposób. Pod tym względem dysertacja posiada duże walory dydaktyczne, co przy pewnej tendencji do minimalizowania nakładu pracy niezbędnego do przygotowania rozprawy doktorskiej i przedstawiania jej w formie cyklu opublikowanych artykułów, nie zawsze pisanych zupełnie samodzielnie przez doktorantów, niepoprzedzonego należywym wprowadzeniem, zasługuje na docenienie.

Teraz przejdę do bardziej szczegółowego opisu kolejnych rozdziałów rozprawy. W rozdziale pierwszym przedstawiono ogólne wprowadzenie do tematyki dysertacji, omówiono egzotyczne własności modów Majorany oraz sposób implementacji takich stanów w materii skondensowanej. Następnie przedstawiono pierwsze dane eksperymentalne wskazujące na istnienie quasi-cząstek Majorany na końcach jednowymiarowego topologicznego nadprzewodnika oraz w jednoatomowych łańcuchach wytworzonych na powierzchni nadprzewodnika. W dalszej części mgr Więckowski wprowadził hamiltonian modelujący jednowymiarowy łańcuch z członami opisującymi tunelowanie pomiędzy węzłami, rozszczepienie zeemanowskie, sprzężenie spinowo-orbitalne oraz parowanie. Jest to kluczowy model, który pozwala opisać tworzenie się stanów topologicznie chronionych na końcach jednowymiarowego drutu. W pierwszym rozdziale zawarto także wiele odnośników do literatury – chciałbym tutaj podkreślić, że Autor wykazał się głęboką znajomością literatury – bibliografia została dobrana bardzo trafnie i zawiera również najnowsze pozycje dotyczące tematyki rozprawy. Rozdział kończy się jasnym określeniem celu dysertacji. Drugi rozdział przedstawia natomiast bardziej formalne rozważania dotyczące modów Majorany. Doktorant najpierw definiuje operatory Majorany oraz odpowiedni operator parzystości, a następnie przedstawia model Kitaeva opisujący jednowymiarowy bezspinowy łańcuch z parowaniem pomiędzy sąsiednimi węzłami. Taki hamiltonian bez oddziaływań można łatwo rozwiązać stosując operatory Majorany – okazuje się, że w zależności od parametrów istnieją dwie fazy: trywialna i topologiczna. W fazie topologicznej na końcach łańcucha powstają zero-energetyczne mody Majorany. W rozdziale trzecim przedstawiono podstawowe koncepcje dotyczące topologicznych obliczeń kwantowych. Doktorant najpierw omówił statystykę nieabelową, której podlegają operatory Majorany, wprowadził pojęcie grupy warkoczowej oraz jej generatory, a następnie przedstawił koncepcję bramek kwantowych wykorzystujących mody Majorany. Jako przykład przedyskutowany został przypadek bramki z minimalną liczbą czterech modów. Rozdział kończy się omówieniem uniwersalnych bramek kwantowych i wyzwań stojących przed ich realizacją w oparciu o mody Majorany.

Druga część dysertacji poświęcona jest metodyce badań. Pierwszy rozdział tej części przedstawia metodę ścisłej diagonalizacji hamiltonianu. Doktorant najpierw na przykładzie symetrii ładunkowej omawia strukturę blokową hamiltonianu, wskazując na istotną rolę symetrii w badaniu spektrum różnych układów. Dla modelu Kitaeva, ze względu na parowanie, ładunek nie jest zachowany, a hamiltonian komutuje tylko z operatorem parzystości, dlatego hamiltonian posiada strukturę dwu-blokową, co stanowi istotne wyzwanie obliczeniowe. W rozdziale tym Doktorant omawia także metody numeryczne stosowane do rozwiązywania zagadnienia własnego dla takich hamiltonianów, odsyłając jednocześnie czytelnika do własnych programów napisanych w C++ i udostępnionych w serwisie github w formie otwartego dostępu. Przy pomocy

udostępnionej biblioteki bardziej zainteresowany czytelnik może odtworzyć wyniki zaprezentowane w dysertacji. Kolejny rozdział (rozdział 5) przedstawia szczegółowo algorytm służący do identyfikacji zerowych modów Majorany, który został opisany w pracy [1]: Andrzej Więckowski, Maciej M. Maśka, and Marcin Mierzejewski, *Identification of Majorana Modes in Interacting Systems by Local Integrals of Motion*, Phys. Rev. Lett. **120**, 040504 (2018). Metoda ta pozwala na znalezienie lokalnych operatorów, tj. związanych z pojedynczym węzłem, dowolnego hamiltonianu, które są całką ruchu. Można tutaj wyróżnić słabe i silne mody Majorany, gdzie operatory dotyczące pierwszych modów komutują tylko z nisko-energetyczną częścią hamiltonianu. Ostatni rozdział części drugiej przedstawia numeryczne sposoby rozwiązywania zależnego od czasu równania Schrödingera, a w szczególności metodę wielomianów Czebyszewa, którą wykorzystano w rozprawie. Następnie Autor wprowadza definicję oraz przedstawia sposób wyznaczania fazy dynamicznej i geometrycznej, które układ nabywa podczas czasowej ewolucji.

Najważniejszą część rozprawy doktorskiej stanowi część III (rozdziały od 7 do 9), która prezentuje oryginalne wyniki otrzymane przez Doktoranta. Rozdział 7, oparty na publikacji [1], jest poświęcony identyfikacji modów Majorany poprzez wyznaczanie całek ruchu badanego hamiltonianu w oparciu o technikę przedstawioną w rozdziale 5. Rozpatrzono model Kitaeva z dodatkowym członem opisującym korelacje pomiędzy drugimi sąsiadami. Badano w szczególności zależności odpowiedniej funkcji autokorelacyjnej dla najbardziej stabilnych modów Majorany, degenerację stanu podstawowego oraz wielkość szczeliny energetycznej pomiędzy stanem podstawowym a pierwszym stanem wzbudzonym. W rozdziale omówiono także skalowanie otrzymanej funkcji autokorelacji oraz zachowanie skali czasowych związanych z oddziaływaniem modów Majorany i oddziaływaniem elektronowym pomiędzy węzłami. Autor zaproponował także funkcję dopasowania do zależności czasowej funkcji autokorelacji, która stosunkowo dobrze opisuje zachowanie układu. Przydałby się tutaj komentarz, co do formalnych przesłanek dla wyboru takiego właśnie dopasowania. Na końcu rozdziału Doktorant zaprezentował wyniki dla funkcji autokorelacji w granicy termodynamicznej. Ciekawym wynikiem jest niewątpliwie wykazanie wzmocnienia lokalizacji modów Majorany na krawędziach łańcucha Kitaeva oraz powiększenia obszaru topologicznego wraz ze wzrostem siły oddziaływań (korelacji pomiędzy węzłami) w układzie. W badanym hamiltonianie uwzględniono korelacje pomiędzy drugimi sąsiadami, nasuwa się tutaj pytanie czy uwzględnienie oddziaływań pomiędzy kolejnymi węzłami łańcucha prowadziłyby do dalszego zwiększenia lokalizacji modów Majorany?

Na to pytanie Doktorant odpowiada w rozdziale 8, przedstawiając wyniki zaprezentowane w publikacji [2]: Andrzej Więckowski and Andrzej Ptak, *Influence of long-range interaction on Majorana zero modes*, Phys. Rev. B **100**, 144510 (2019). W pracy tej badano wpływ oddziaływań dalekozasięgowych (oddziaływania do czwartych sąsiadów) na rozkład przestrzenny i czas życia quasi-cząstek Majorany. Praca [2] jest zatem rozszerzeniem publikacji [1]. Autor w szczególności analizował zachowanie takich samych wielkości jak w rozdziale 7 w zależności od potencjału chemicznego, siły korelacji oraz wielkości przerwy energetycznej. Dodatkowo przebadano także przekrywanie się modów Majorany. Doktorant wskazuje, że oddziaływania z dalszymi sąsiadami mają destrukcyjny wpływ na mody Majorany. Tutaj jednak chciałbym zauważyć, że z danych widocznych na Rys. 8.1(a)-(b), dla oddziaływań z najbliższymi i drugimi sąsiadami, można odnieść odwrotne wrażenie – podczas gdy kontur czarny jest porównywalny, kontur biały wydaje się większy dla przypadku (b). Tendencja opisana przez mgra Więckowskiego jest już jednak dobrze widoczna na Rys. 8.2, gdzie wyraźnie widać zmniejszenie obszaru

topologicznego, gdy oddziaływania występują tylko pomiędzy dalszymi sąsiadami. Powyższe spostrzeżenie jest potwierdzone także w badaniu rozkładu przestrzennego modów Majorany – na Rys. 8.7 widać nieznaczną degradację modów wraz ze wzrostem zasięgu oddziaływania. Wynik ten przedstawiono dla łańcucha o długości  $L=10$ , a więc stosunkowo krótkiego. Ciekawym byłoby sprawdzenie jak rozkład przestrzenny zależy od oddziaływania  $V_r$  dla większych wartości  $L$ . Chciałbym jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że uwzględnianie wpływu oddziaływania tylko dla zadanego  $r$  jest interesujące z czysto modelowego punktu widzenia, jednak wydaje się mało realistyczne – czy nie należało raczej uzupełniać hamiltonian o sukcesywnie człony oddziaływania pomiędzy coraz dalszymi sąsiadami i wtedy badać ich wpływ na zachowanie się modów Majorany? Moim zdaniem takie podejście byłoby bardziej uzasadnione z eksperymentalnego punktu widzenia.

Ostatni rozdział prezentujący oryginalne wyniki badań Doktoranta – rozdział 9 – jest poświęcony omówieniu rezultatów przedstawionych w publikacji [3]: Andrzej Więckowski, Marcin Mierzejewski, and Michał Kupczyński, *Majorana phase gate based on the geometric phase*, Phys. Rev. B **101**, 014504 (2020). Praca ta jest poświęcona analizie dynamiki qubitu zrealizowanego na czterech modach Majorany zlokalizowanych na dwóch trój-złączach. Wykazano, że układ taki umożliwia realizację bramki fazowej opartej na fazie geometrycznej poprzez wyplatanie odpowiednich, przekrywających się modów Majorany. Jak Autor wskazuje, w celu realizacji takiej bramki konieczne jest pewne rozszczepienie modów Majorany wiążące się z utratą topologicznej protekcji, w przeciwieństwie do bramek typu Hadamarda i CNOT, które są topologicznie chronione. Choć doświadczalna implementacja zaproponowanej bramki może stanowić ogromne wyzwanie ze względu na założenie identyczności obu trój-złącz, wyniki teoretyczne mają niewątpliwie duże znaczenie dla rozwoju topologicznych obliczeń kwantowych i są próbą zaproponowania zestawu bramek gwarantujących uniwersalność takich obliczeń. Część III kończy się podsumowaniem, gdzie Doktorant przedstawia syntetyczne zestawienie uzyskanych wyników, omawia zrealizowane cele oraz dyskutuje kolejne wyzwania.

Do obowiązków recenzenta należy także ocena edytorskiej strony przedstawionej rozprawy. Bardzo często recenzenci mają w tym względzie stosunkowo proste zadanie, jednak w przypadku dysertacji pana Więckowskiego spotykamy się z wyjątkową starannością o redakcyjną stronę przygotowania pracy. Choć np. w równaniu (2.2) brak indeksu „i” przy operatorze Majorany (można znaleźć też kilka innych bardzo drobnych uchybień), biorąc pod uwagę objętość tekstu stwierdzam, że praca jest przygotowana w sposób bardzo staranny i rzetelny.

Podczas obrony chciałbym, aby Doktorant omówił bardziej szczegółowo na czym polegał jego konkretny wkład w powstanie publikacji, których wyniki zostały przedstawione w rozprawie doktorskiej. Chciałbym także, aby Kandydat odniósł się do ram czasowych powstania pracy [1]. Publikacja została wysłana do redakcji w lipcu 2017 roku, a ukazała się na początku 2018 roku, podczas gdy mgr Więckowski rozpoczął studia doktorskie w 2018 roku. Publikacja powstała więc przed podjęciem studiów trzeciego stopnia, jej tematyka jest jednak zbieżna z tematyką doktoratu, a nie pracy magisterskiej, zakładam więc, że Kandydat rozpoczął prace nad zagadnieniami związanymi z modami Majorany przed formalnym rozpoczęciem studiów doktorskich. Wszystkie badania przedstawione w doktoracie dotyczą modelu Kitaeva z dodatkowymi członami opisującymi korelacje pomiędzy kolejnymi węzłami łańcucha. Jak Autor sam zaznaczył we wstępie, minimalny model opisujący druty kwantowe, to łańcuch spinowy z odpowiednimi oddziaływaniami – równanie (1.1). Na ile realistyczne jest ograniczenie

się wyłącznie do modelu Kitaeva biorąc pod uwagę, bądź co bądź, dość szeroki zakres parametrów rozważanych w dysertacji? Autor bada wpływ oddziaływań pomiędzy kolejnymi węzłami w modelu Kitaeva. Jakie są przesłanki eksperymentalne by takie człony uwzględniać? Przekrywanie się orbitali maleje w sposób eksponencjalny wraz z odległością, dlatego można oczekiwać, że oddziaływania kulombowskie z dalszymi węzłami będą znacznie mniejsze od oddziaływań pomiędzy sąsiednimi węzłami. To pytanie jest szczególnie istotne w przypadku pracy [2], gdzie każdy potencjał był rozpatrywany oddzielnie – takie założenie wydaje się nierealistyczne – wydaje się mało prawdopodobne, by korelacje nie istniały pomiędzy najbliższymi węzłami, a były skończone dla dalszych węzłów.

Jeżeli chodzi o ogólne osiągnięcia Doktoranta, mgr Więckowski jest współautorem sześciu publikacji, z których jedna praca ukazała się w *Physical Review Letters*, jedna w *Scientific Reports* oraz trzy w *Physical Review B*. Dwie kolejne publikacje są na etapie recenzowania. W siedmiu z powyższych prac mgr Więckowski jest pierwszy autorem, co świadczy o jego istotnym wkładzie w powstanie tych publikacji. Doktorant prezentował także wyniki swoich badań na 9 konferencjach, niestety w dokumentacji nie podano w jakiej dokładnie formie. Biorąc pod uwagę fakt, że mgr Więckowski tytuł magistra uzyskał dwa lata temu, można stwierdzić, że rozwój Jego kariery naukowej przebiega imponująco szybko – niewątpliwie Doktorant musi cechować się ogromną pracowitością i sumiennością, co jest bardzo ważne w pracy naukowej.

### **Podsumowanie**

Rozprawa doktorska mgra Andrzeja Więckowskiego dotyczy najbardziej aktualnych i ważnych zagadnień współczesnej fizyki. Autorowi udało się uzyskać szereg nowych, interesujących rezultatów, które zostały opublikowane w wiodących czasopismach naukowych. W ramach rozprawy opracowano metodę pozwalającą identyfikować mody Majorany dla dowolnych hamiltonianów. Zbadano również wpływ dalekozasięgowych oddziaływań wielociałowych na własności quasi-cząstek Majorany. Ponadto, zaproponowano nową bramkę kwantową w oparciu o mody Majorany z wykorzystaniem fazy topologicznej, co stanowi istotny wkład w zagadnienia związane z topologicznymi obliczeniami kwantowymi. Badania przeprowadzone w ramach doktoratu wymagały od Doktoranta zaznajomienia się z zaawansowanymi metodami wielociałowymi oraz z koncepcjami informatyki kwantowej oraz topologicznych obliczeń kwantowych – nie mam wątpliwości, że mgr Więckowski bardzo dobrze wywiązał się z tego zadania. Od strony formalnej dysertacja została przygotowana bardzo starannie, a dobór literatury świadczy o szerokiej znajomości najnowszych osiągnięć w tematyce rozprawy. Biorąc powyższe pod uwagę, uważam, że dysertacja spełnia z naddatkiem wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim. **W związku z tym, wnioskuję o dopuszczenie mgra Andrzeja Więckowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego, jednocześnie, ze względu na wysoki poziom naukowej dysertacji oraz rangę naukową opublikowanych wyników, wnoszę o jej wyróżnienie.**

*Jacek Weyman*