



Kraków, 29 sierpnia 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgr. Bartłomieja Nowaka zatytułowanej
Discontinuous phase transitions in discrete opinion dynamics models

Praca doktorska została wykonana pod opieką naukową pani prof. Katarzyny Sznajd-Weron i pana prof. Michela Grabischa.

Przedstawione w rozprawie wyniki zostały opublikowane w czterech artykułach w renomowanych czasopismach naukowych:

- [1] Bartłomiej Nowak and Katarzyna Sznajd-Weron, *Homogeneous Symmetrical Threshold Model with Nonconformity: Independence versus Anticonformity*, Complexity (2019), 5150825;
- [2] Bartłomiej Nowak and Katarzyna Sznajd-Weron, *Symmetrical threshold model with independence on random graphs*, Physical Review E 101 (2020), 052316;
- [3] Bartłomiej Nowak, Michel Grabisch, and Katarzyna Sznajd-Weron, *Threshold model with anticonformity under random sequential updating* Physical Review E 105 (2022), 054314;
- [4] Bartłomiej Nowak, Bartosz Stoń, and Katarzyna Sznajd-Weron, *Discontinuous phase transitions in the multi-state noisy q-voter model: quenched vs. annealed disorder* Scientific Reports 11 (2021), 6098;

i jednym prepryncie

- [5] Bartłomiej Nowak and Katarzyna Sznajd-Weron, *Switching from a continuous to discontinuous phase transition under the quenched disorder*, arXiv:2106.11238

Z przedstawionej przez Autora samooceny dotyczącej jego udziału w tych artykułach wynika, że uczestniczył on aktywnie we wszystkich etapach procesu ich powstawania: począwszy od sformułowania modeli, poprzez pisanie programów komputerowych, obliczenia analityczne i numeryczne, analizę i interpretację wyników, przegląd literatury, a skończywszy na przygotowaniu manuskryptów. Uznać więc należy, że jego udział był kluczowy.

Oprócz pięciu wymienionych artykułów rozprawa zawiera streszczenie i wstęp, na który składa się: ogólne wprowadzenia do tematyki, opis celu pracy, streszczenia poszczególnych

artykułów, podsumowanie i bibliografia. Wprowadzenie do rozprawy zostało jasno i rzeczowo zredagowane.

Modele badane w pracy doktorskiej można opisać następującym ogólnym schematem. Zadany jest graf. W każdym wierzchołku tego grafu umieszczony jest pojedynczy spin, który może znajdować się w jednym z s stanów. Stany spinów ewoluują zgodnie z losową dynamiką asynchroniczną, której elementarny krok polega na losowym wyborze wierzchołka na grafie i uaktualnieniu stanu znajdującego się w nim spinu według lokalnej reguły, zależnej od stanów sąsiednich spinów w danej chwili. Sama reguła też jest losowa. Jest wybierana z pewnym prawdopodobieństwem spośród dwóch reguł, z których jedna jest uznawana za regułę podstawową, a druga za zaburzenie. Elementarne kroki powtarzane są sekwencyjnie. Pytania są następujące. Czy układ osiąga stan stacjonarny? Jaki jest diagram fazowy? Co można powiedzieć o stabilności faz? Jaka jest zależność stanów stacjonarnych od parametrów modelu i stanu początkowego? Czy mała zmiana parametrów może wywołać skokową zmianę stanu stacjonarnego w analogii do nieciągłych przejść fazowych znanych z fizyki równowagowej?

W pracy przebadano kilka różnych wariantów modeli opartych na powyższym schemacie. W szczególności były to wariacje modelu q -voter i modelu progowego. W modelach q -voter podstawowa reguła polega na dostosowywaniu spinu do grupy q losowo wybranych sąsiadów pod warunkiem, że wszystkie spiny w tej grupie znajdują się w tym samym stanie. W modelach progowych reguła podstawowa uzależnia dostosowanie stanu spinu do otoczenia od tego, czy ułamek sąsiednich spinów, które znajdują się w danym stanie, przekracza zadany próg procentowy. Ponieważ obie te reguły prowadzą do dopasowania spinu do otoczenia, w kontekście modelowania dynamiki opinii stosowane są one do symulowania zmian opinii wywoływanych postawą konformistyczną. W tym kontekście najczęściej rozpatruje się modele dwustanowe ($s = 2$).

W pracy badano głównie wpływ czynników zaburzających na dynamikę układu. Zaburzenia wywołane stosowaniem reguły odmiennej od podstawowej były wprowadzone do dynamiki na dwa różne sposoby, które nawiązują do typów nieporządku w układach statystycznych określanymi terminami 'annealed' i 'quenched'. W pierwszym wypadku, w każdym kroku ewolucji w odniesieniu do każdego spinu stosuje się regułę podstawową z prawdopodobieństwem $1 - p$, a regułę zaburzającą z prawdopodobieństwem p . W drugim wypadku regułę podstawową stosuje się w stosunku do ułamka, $1 - p$, wybranych losowo spinów, a zaburzającą w stosunku do pozostałego ułamka, p . W trakcie ewolucji tego typu układ nie jest więc jednorodny. Jednorodność można odtworzyć poprzez uśrednienie po różnych losowych wyborach spinów poddawanych regule podstawowej i zaburzającej. Zaburzenia typu 'annealed' i 'quenched' dają różne wyniki.

Ponieważ, jak wspomniano, wszystkie badane w pracy modele podpadają pod wspólny schemat logiczny, wypracowano wspólną metodologię do ich analizy. Metoda wyznaczania stanów stacjonarnych oparta jest na równaniach opisujących wartość oczekiwaną zmiany liczby spinów w danym stanie w jednym kroku ewolucji. Ponieważ w jednym kroku liczba spinów w danym stanie może zmienić się maksymalnie o jeden, można wywnioskować, że wartość ocze-

kiwana tej zmiany jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy prawdopodobieństwem zwiększenia liczby spinów w tym stanie o jeden i prawdopodobieństwem zmniejszenia o jeden. Warunkiem koniecznym, aby stan mógł być stacjonarny jest zerowanie się tej różnicy. Na podstawie badania wypukłości różnicy można stwierdzić, czy dany stan jest stanem stabilnym ewolucji. Obliczenia analityczne prowadzone były w oparciu o różne warianty przybliżenia średniego pola, które dobrze stosuje się do wysoko wymiarowych grafów, w tym grafów pełnych i grafów Erdösa-Rényi'ego. Wyniki były porównywane z wynikami numerycznymi otrzymanymi za pomocą symulacji Monte-Carlo.

W pracy [1] wprowadzono symetryczną wersję modelu progowego. Model przeanalizowano na grafie pełnym w wersji z zaburzeniami niezależnymi (symetrycznymi) i antykonformistycznymi. Zachowanie układu przebadano w zależności od parametru kontrolującego procentową wartość progową r dla reguły konformistycznej oraz prawdopodobieństwa wystąpienia zaburzenia, p . Dla modelu z zaburzeniami wywołanymi niezależnymi symetrycznymi wyborami stanów spinów zaobserwowano nieciągłe przejście fazowe dla $r > 0.5$. Polega ono na tym, że dla pewnej krytycznej wartości prawdopodobieństwa p następuje skokowa zmiana gęstości obsadzenia z $c \neq 1/2$ do $c = 1/2$, gdzie c oznacza ułamek spinów skierowanych do góry. Dla modelu z zaburzeniami wywołanymi zmianami spinów zgodnie z regułą antykonformistyczną, z tym samym progiem r co w regule konformistycznej, zaobserwowano przejście ciągłe.

W pracy [2] zbadano wersję modelu z zaburzeniami wywołanymi niezależnymi symetrycznymi zmianami spinów na grafach Erdösa-Rényi'ego i grafach typu małego świata. W pracy rozpatrzono wersję o stosunkowo dużym średnim stopniu $\langle k \rangle$, co czyni te grafy dość gęstymi i powoduje, że przybliżenie średniego pola dobrze działa. Jedynie dla grafów z małym średnim stopniem, a dla sieci małego świata również z małym parametrem przepięć $\beta \leq 1$, można oczekiwać odchyżeń od wyników otrzymanych za pomocą metody średniego pola. Wyniki analityczne przedstawione w artykule opierają się o zmodyfikowaną wersję przybliżenia średniego pola, nazywaną 'pair approximation', w której w równaniach oprócz koncentracji spinów pojawia się druga niezależna wielkość fizyczna, tzn. gęstość połączeń pomiędzy parami sąsiednich spinów znajdujących się w przeciwnych stanach. Rozwiązania równań są wynikiem wzajemnego wpływu tych wielkości na siebie. Głównym rezultatem pracy są równania opisujące położenia stacjonarnych rozwiązań na diagramie fazowym w zależności od r, p i średniego stopnia $\langle k \rangle$, dzięki którym można wyznaczyć głębokość histerezy przy przejściu pomiędzy różnymi gałęziami tych rozwiązań.

W pracy [3] przedstawiono wyczerpujące studium asymetrycznego modelu progowego w wersji z zaburzeniami wywołanymi przez postawę antykonformistyczną. Wyznaczono diagram fazowy w przypadku jednego wspólnego progu dla wszystkich spinów oraz progu zadanego przez zmienną losową. W szczególności rozpatrzono model, w którym wartości progu są niezależnymi, identycznymi zmiennymi losowymi z rozkładem beta. Wyznaczono również rozkłady gęstości stanów spinowych dla układów o skończonym rozmiarze. Rachunek oparto na analizie lewego wektora własnego do wartości własnej równej jeden macierzy stochastycznej opisującej elementarne przejścia w łańcuchu Markowa opisującym ewolucję w układzie.

W pracach [4,5] przeanalizowano różnice zachowań wynikające z implementacji zaburzeń 'annealed' i 'quenched' w s -stanowym modelu q -voter. W szczególności pokazano, że model z zaburzeniami wywołanymi przez niezależne symetryczne zmiany spinów posiada dla więcej niż dwóch stanów ($s > 2$) nieciągłe przejścia fazowe dla każdego $q > 1$, w odróżnieniu od modelu dwustanowego ($s = 2$), gdzie nieciągłe przejścia fazowe obserwowane są jedynie dla $q > 5$. Z kolei dla modelu z zaburzeniami antykonformistycznymi dla $s > 2$ przejście zmienia charakter z ciągłego na nieciągły przy zmianie typu zaburzeń z 'annealed' na 'quenched'.

Bardzo wysoko oceniam przedstawione w pracy wyniki zarówno pod względem merytorycznym jak i warsztatowym. Autor opanował wiele różnych technik obliczeniowych i szeroki materiał pojęciowy. Przedstawione w rozprawie modele oparte są na oryginalnych pomysłach. Wyniki pogłębiły wiedzę na temat możliwych zachowań dynamiki opinii w grupach społecznych. Z drugiej strony są też niezwykle interesujące z fizycznego punktu widzenia, ponieważ opisują ewolucję stochastyczną z nietrywialnymi stanami stacjonarnymi, w których występuje całe spektrum ciekawych przemian fazowych.

Na koniec mam kilka uwag krytycznych i pytań.

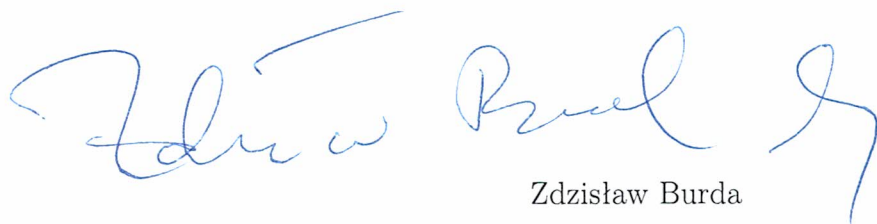
- W artykule [1] we wzorach (22) i (23) górne i dolne gałęzie rozwiązania powinny sumować się do jedynki ze względu na symetrię $c \leftrightarrow 1 - c$, a nie sumują się. W artykule jest duży przeskok pomiędzy wzorami analitycznymi wyprowadzonymi w rozdziale 2, a wynikami omawianymi w rozdziale 3, które w zasadzie nie nawiązują do tych wzorów. Co prawda przedstawiono argumenty heurystyczne, które wyjaśniają wyniki symulacji numerycznych, ale skoro wcześniej poświęcono pół rozdziału na wyprowadzenie wzorów analitycznych, to właśnie w oparciu o nie powinno się formułować przewidywania i wnioski.
- Dla dużych N można przybliżyć dystrybuantę rozkładu dwumianowego przez dystrybuantę rozkładu normalnego. Takie przybliżenie daje następujące wyrażenie na $B_c = 1/2 - 1/2 \text{Erf}(\sqrt{N}(r - c)/\sqrt{2c(1 - c)})$ i analogiczne wyrażenie na B_{1-c} , w którym c i $1 - c$ zamieniają się rolami. Przybliżenie dobrze odtwarza gałęzie rozwiązania widoczne na rysunku 1, wraz z zaokrągleniami w rejonie $c - r \sim O(1/\sqrt{N})$, których niestety nie widać na rysunku. Gałęzie zaznaczone na rysunku przerywaną linią powinny mieć sigmoidalny kształt odziedziczony po funkcji błędu. W granicy $N \rightarrow \infty$ zależność B_c od c redukuje się do funkcji skokowej o skoku między zerem a jeden w $c = r$. Ta obserwacja pozwala natychmiast odtworzyć gałęzie $c = 1 - p/2$ i $c = p/2$ oraz $c = r$ i $c = 1 - r$ dla $p \leq 2(1 - r)$ dla modelu (I). Rozwiązanie symetryczne $c = 1/2$, dla którego wzór (20) jest nieokreślony, wynika wprost z równań (15), które dają $\gamma_+ = \gamma_-$ dla $c = 1/2$ niezależnie od p .
- Dla modelu (A) sprawa jest dość ciekawa. Jak wynika ze wzorów (16), $c = 1/2$ jest rozwiązaniem stabilnym, ponieważ ze względu na symetrię równania te tożsamościowo dają $\gamma_+ = \gamma_-$ dla $c = 1/2$ niezależnie od p i N . Widać również, że dla $c \in (1 - r, r)$ wzory (16) dają zerowe prawdopodobieństwa $\gamma_+ = \gamma_- = 0$ w granicy $N \rightarrow \infty$. Oznacza

to, że wartość c nie zmienia się w trakcie ewolucji, jeśli leży w zakresie $c \in (1 - r, r)$. To jest równoważne argumentowi heurystycznemu przedstawionemu w pracy. Szkoda jednak, że nie został on wypowiedziany wprost w oparciu o wzory analityczne. Jak wyglądałoby rozwiązanie w przypadku, gdy próg w regule antykonformistycznej miałby inną wartość niż w regule konformistycznej?

- Symetryczny model Potts'a znany z fizyki równowagowej ma dwie fazy: fazę symetryczną i fazę ze spontanicznie złamaną symetrią, w której tylko jeden ze stanów dominuje nad innymi. Nie występują fazy, w których dwa stany albo więcej dominowałyby nad pozostałymi, gdyż takie konfiguracje są tłumione przez entropię. Przeprowadzone w artykule [4] rozważania we wzorach (9), (10) i późniejszych, w których dwa albo więcej stanów spinowych dominuje nad innymi, wydają się więc czysto hipotetyczne. Jak należało się spodziewać, nie udało się zaobserwować takich stanów w symulacjach Monte-Carlo. Mam wątpliwości, czy należało tym hipotetycznym rozważaniom poświęcać tyle miejsca i uwagi.

Powyższe uwagi krytyczne nie wpływają na moją wysoką ocenę rozprawy doktorskiej. Rozprawa dotyczy ciekawej i aktualnej tematyki i pokazuje przydatność zaawansowanych narzędzi fizyki statystycznej w zagadnieniach interdyscyplinarnych. Zawiera wiele oryginalnych i ważnych wyników.

Uważam, że praca spełnia z nadwyżką wymagania stawiane rozprawom doktorskim i w związku z tym wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Bartłomieja Nowaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Zdzisław Burda

