

Warszawa, dn. 20 września 2022 r

Dr hab. inż. Andrzej Krawiecki  
Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej  
Koszykowa 75, 00-662 Warszawa  
e-mail: [andrzej.krawiecki@pw.edu.pl](mailto:andrzej.krawiecki@pw.edu.pl)  
tel. 22 234 7958  
fax 22 628 2171

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr inż. Bartłomieja Nowaka  
„Discontinuous phase transitions in discrete opinion dynamics models”**

W ostatnich trzydziestu latach zastosowania metod i modeli znanych z fizyki do zagadnień z dziedziny socjologii i ekonomii, w szczególności analiza kształtowania się opinii społecznej przy pomocy modeli nierównowagowych, stały się jednym z wiodących kierunków badań w fizyce statystycznej. Wiele wyników w tej dziedzinie uzyskano przy pomocy modeli z dynamiką dyskretną w czasie i w przestrzeni stanów, w których agentów reprezentują „spiny”, mogące przyjmować wartości z dyskretnego zbioru stanów (najczęściej dwóch), odpowiadające różnym opiniom na zadany temat; na określenie takich agentów pojawił się nawet termin „spinson” (od spin + person). Modele takie mają najczęściej charakter stochastyczny, a czynnik losowy wprowadza się w nich przez różne definicje prawdopodobieństwa zmiany opinii agenta na jednostkę czasu, zależnego od parametru stanowiącego miarę „szumu wewnętrznego” w układzie (stopień niezależności lub prawdopodobieństwo podjęcia przypadkowej decyzji przez agenta, formalna temperatura i in.). Wśród takich modeli można wymienić model Isinga i jego modyfikacje (np.  $q$ -neighbor Ising model), liniowe i nieliniowe modele głosującego (np. voter model,  $q$ -voter model), model głosowania większościowego (majority vote model) i in. Wiele wysiłku włożono w określenie warunków, w których w ww. modelach obserwuje się przejście fazowe od stanu „paramagnetycznego”, z przypadkowym rozkładem opinii wśród agentów, do stanu „ferromagnetycznego”, z jedną lub kilkoma dominującymi opiniami. Z punktu widzenia socjologii najciekawsze jest wystąpienie przejścia pierwszego rodzaju (nieciągłego), z nagłym pojawieniem się fazy ferromagnetycznej oraz możliwą pętlą histerezy dla magnetyzacji i współistnieniem fazy paramagnetycznej i ferromagnetycznej. W związku z równie szybko rosnącym w fizyce statystycznej zainteresowaniem sieciami złożonymi, agenci w ww. modelach często umieszczani są w węzłach i oddziałują wzdłuż krawędzi takich sieci, co ma odzwierciedlać skomplikowaną strukturę oddziaływań społecznych. Podstawowym narzędziem w badaniu kształtowania się opinii społecznej są symulacje numeryczne, jednak występowanie przejść fazowych w większości ww. modeli można wyjaśnić również przy pomocy metod analitycznych, np. przybliżenia pola średniego (w tym heterogenicznego w przypadku modeli na sieciach złożonych), przybliżenia par, przybliżonych równań Master, łańcuchów Markowa i in., których przewidywania w wielu przypadkach wykazują ilościową zgodność z wynikami symulacji.

Recenzowana rozprawa doktorska mgr inż. Bartłomieja Nowaka wnosi znaczący wkład we wspomnianą dziedzinę badań przez wprowadzenie dwóch nowych modeli kształtowania się opinii społecznej: symetrycznego modelu progowego i wielostanowego modelu  $q$ -voter oraz zbadanie ich własności krytycznych. Założonym i zrealizowanym w rozprawie celem badań jest określenie warunków, w jakich w analizowanych modelach pojawia się przejście ferromagnetyczne przy zmianie odpowiednio zdefiniowanego szumu wewnętrznego, z reguły do stanu z jedną dominującą opinią, a w szczególności przejście nieciągłe. Szum wewnętrzny



określony jest przez stopień niezależności (rozumianej jako podejmowanie decyzji niezależnie od wpływu otoczenia) lub antykonformizmu (rozumianego jako podejmowanie decyzji wbrew opinii dominującej w otoczeniu) agentów oraz przez rodzaj nieporządku w układzie (quenched – np. konkretni agenci zawsze podejmują decyzje niezależnie, lub annealed – każdy agent z pewnym prawdopodobieństwem podejmuje decyzje niezależnie). Badania prowadzone są z wykorzystaniem kilku metod analitycznych (przybliżenie pola średniego, przybliżenie par, łańcuchy Markowa) i symulacji numerycznych metodą Monte Carlo. Rozprawę stanowi zbiór pięciu artykułów naukowych, numerowanych jako A.1 – A.5, opublikowanych w wysoko punktowanych, renomowanych czasopismach naukowych: 1 artykuł w *Scientific Reports* (140 p.), 3 artykuły w *Physical Review E* (140 p.) i 1 artykuł w *Complexity* (70 p.); według bazy Web of Science prace te były cytowane 24 razy. We wszystkich artykułach mgr inż. B. Nowak jest pierwszym autorem, co nie wynika z kolejności alfabetycznej, drugim lub trzecim współautorem jest Promotor – prof. dr hab. Katarzyna Sznajd-Weron, w dwóch artykułach na drugim miejscu wymienieni są inni współautorzy. Ponadto do rozprawy dołączono wprowadzenie, zawierające omówienie i podsumowanie najważniejszych wyników ww. prac naukowych i wnioski oraz bibliografię, liczącą 151 pozycji. W artykułach A.4, A.5 oraz we wprowadzeniu zawarto opisy wkładu autorów poszczególnych prac, z których jednoznacznie wynika, że we wszystkich pięciu publikacjach wkład mgr inż. Bartłomieja Nowaka był największy i decydujący. Rozprawa została zredagowana w języku angielskim.

Do najważniejszych osiągnięć rozprawy należy zaliczyć:

- Wprowadzenie i zbadanie homogenicznego (w pracach A.1, A.2) oraz heterogenicznego (w pracy A.3) symetrycznego i niesymetrycznego modelu progowego, stanowiącego modyfikację progowego modelu Wattsa i odtwarzającego, w pewnych przypadkach granicznych lub szczególnych, model głosowania większościowego i  $q$ -voter. W modelu tym istnieje próg, czyli minimalna ułamek sąsiadów o odmiennej opinii, skłaniający agenta do zmiany opinii na przeciwną. Zbadano wersje modelu z niezależnością i antykonformizmem agentów, na grafie zupełnym i na sieciach przypadkowych (w szczególności na grafach przypadkowych Erdösa-Rényi oraz grafach małych światów Wattsa-Strogatza). Analizę teoretyczną przeprowadzono nie tylko w przybliżeniu pola średniego, lecz również przy pomocy odpowiednio sformułowanego przybliżenia par oraz łańcuchów Markowa.
- Wykazanie (w pracach A.1, A.2), że w homogenicznym symetrycznym modelu progowym z niezależnością agentów, poza szczególnym przypadkiem modelu głosowania większościowego, możliwe jest wystąpienie nieciągłego przejścia fazowego do stanu ferromagnetycznego, z wyraźną pętlą histerezy dla magnetyzacji, w miarę spadku stopnia niezależności agentów. Ponadto w przypadku modelu na sieciach złożonych wykazano występowanie ciągłego przejścia ferromagnetycznego dla małych wartości  $\langle k \rangle$  (średniego stopnia wierzchołków) oraz punktu trójkrytycznego, w którym przy odpowiednio wysokiej wartości  $\langle k \rangle$  przejście zmienia charakter z ciągłego na nieciągły.
- Wykazanie (w pracy A.3), że w heterogenicznym niesymetrycznym modelu progowym z antykonformizmem agentów (z progami dla poszczególnych agentów wygenerowanymi z zadanego rozkładu prawdopodobieństwa) i dynamiką asynchroniczną możliwe jest wystąpienie ciągłego lub nieciągłego przejścia ferromagnetycznego w miarę jak zmienia się koncentracja antykonformistów. Wykazano, że charakter przejścia fazowego zależy od parametrów (w szczególności symetrii względem wartości oczekiwanej) ww. rozkładu prawdopodobieństwa dla progów.
- Wprowadzenie (w pracy A.4) wielostanowego modelu  $q$ -voter z niezależnością agentów, w którym agenci mogą przyjmować  $s \geq 2$  stany (opinie), i zbadanie tego modelu na grafie zupełnym dla dwóch rodzajów nieporządku: „quenched” i „annealed”. Wykazano, że w badanym modelu dla  $s > 2$  i dowolnego rozmiaru otoczenia agenta  $q \geq 2$  dla obu



rodzajów nieporządku występują nieciągłe przejścia ferromagnetyczne w miarę zmniejszania stopnia niezależności agentów, aczkolwiek w przypadku nieporządku typu „quenched” nieciągłość jest nieco słabiej zaznaczona (np. obserwuje się ogólnie węższe pętle histerezy dla koncentracji agentów z wybraną opinią). Z przeprowadzonych badań wynika, że własności krytyczne wielostanowego modelu  $q$ -voter z niezależnością agentów istotnie różnią się od własności modelu dwustanowego, w którym dla pojawienia się przejścia pierwszego rodzaju i pętli histerezy wymagany jest minimalny rozmiar otoczenia agenta  $q > 5$ .

- Wprowadzenie (w pracy A.5) wielostanowego modelu  $q$ -voter z antykonformizmem agentów na grafie zupełnym i wykazanie, że przy zmianie koncentracji antykonformistów w modelu z nieporządkiem typu „quenched” może pojawić się nieciągłe przejście ferromagnetyczne, podczas gdy w modelu z nieporządkiem typu „annealed” pojawia się wyłącznie przejście ciągłe. Jest to wynik niespodziewany i różny od tego, co zwykle obserwuje się w podobnych modelach kształtowania się opinii, w których nieporządek typu „annealed” promuje, a typu „quenched” – tłumi przejście nieciągłe.

Prace A.1-A.5 i cała rozprawa doktorska mgr inż. B. Nowaka wpisują się w główny nurt badań różnych modeli kształtowania się opinii społecznej w grupie Prof. dr hab. Katarzyny Sznajd-Weron. Warto podkreślić, że doktorant zadbał, aby osadzić swoje wyniki nie tylko w kontekście fizyki nierównowagowych przemian fazowych, lecz również w kontekście socjologicznym. W konsekwencji recenzowana rozprawa zawiera nowe i ważne wyniki, pozwalające lepiej zrozumieć warunki, w jakich w rzeczywistych społeczeństwach mogą zachodzić nagłe zmiany opinii.

Składające się na omawianą rozprawę artykuły naukowe przeszły wymagający proces recenzji w renomowanych czasopismach naukowych, trudno jest więc doszukać się w nich znaczących nieprawidłowości. Tym niemniej lektura rozprawy nasunęła mi kilka uwag dotyczących kwestii, które moim zdaniem nie zostały dostatecznie wyjaśnione ani w pracach A.1 – A.5, ani w dołączonym wprowadzeniu.

- W pracach A.1, A.2 autorzy rozpatrują homogeniczny symetryczny model progowy. W pierwszym przypadku model badany jest na grafie zupełnym z dwoma rodzajami szumu: niezależnością agentów oraz antykonformizmem, natomiast w drugim – na sieciach przypadkowych. Warto podkreślić, że w tym ostatnim przypadku rozpatrywany model z niezależnością agentów jest, z dokładnością do szczegółów typu definicja funkcji signum z  $sgn(0) = 0$ , równoważny modelowi głosowania większościowego z bezwładnością (majority vote model with inertia), wprowadzonym wcześniej w pracy [117] H. Chen *et al.*, *Phys. Rev. E* **95**, 042304 (2017), cytowanej jako [47] w pracy A.1 oraz [15] w A.2. W modelu Chena i in., podobnie jak w symetrycznym modelu progowym, a przeciwnie niż w zwykłym modelu głosowania większościowego, przy pewnych zakresach parametrów obserwowano nieciągłe przejście fazowe do stanu ferromagnetycznego z pętlą histerezy dla magnetyzacji. Doktorant wspomina o podobieństwie obu modeli, np. w rozdz. 4 pracy A.1, w rozdz. VI pracy A.2 oraz we wprowadzeniu na str. 10, 11, 17, jednakże moim zdaniem czyni to w sposób niewystarczający. Warto byłoby np. zauważyć, że parametr bezwładności  $\vartheta$  z pracy [117] wiąże się bezpośrednio z progiem  $r$  z pracy A.2 równaniem  $r = 1/[2(1 - \vartheta)]$ , a parametr  $f = p/2$ ; można to łatwo pokazać, porównując wzory (1) z pracy [117] i (7) z A.2. Jest rzeczą interesującą, że chociaż w obu modelach prawdopodobieństwo zmiany opinii agenta w pojedynczym kroku czasowym, wyrażone ww. wzorami, jest takie samo, to motywacje, leżące u podstaw sformułowania tych modeli są z gruntu odmienne. W modelu głosowania większościowego z bezwładnością mechanizm, prowadzący do pojawienia się nieciągłego przejścia ferromagnetycznego, powiązany jest z pamięcią agentów o własnej aktualnej opinii i oporem przed jej zmianą. Natomiast w obu wersjach modelu, wprowadzonego przez autorów w pracach A.1, A.2, wymóg  $r > 0.5$  większości



sąsiadów z odmienną opinią dla zmiany opinii agenta na przeciwną (super-majority, str. 53) wynika z eksperymentów socjologicznych (np. A.2, rozdz. VI, eksperyment z wielokrotnym użyciem ręczników hotelowych).

- Kolejna uwaga wiąże się z poprzednią i dotyczy metod teoretycznych przewidywania własności krytycznych symetrycznych modeli progowych z niezależnością agentów, badanych w pracach A.1, A.2. W pracach tych autorzy używają, odpowiednio, przybliżenia pola średniego oraz (homogenicznego) przybliżenia par (pair approximation) m.in. do odtworzenia zależności magnetyzacji od poziomu szumu wewnętrznego (np. stopnia niezależności agentów), wyznaczenia wartości krytycznych szumu wewnętrznego, szerokości pętli histerezy, rodzaju obserwowanego przejścia fazowego i uzyskania diagramów fazowych dla różnych parametrów  $r$ ,  $\langle k \rangle$ ,  $\beta$  (prawdopodobieństwo przekierowania krawędzi w modelu Watts-Strogatza). Warte podkreślenia jest dobra zgodność przewidywań teoretycznych z wynikami symulacji Monte Carlo badanych modeli. W szczególności przybliżenie par daje dobrą zgodność ilościową w przypadku modelu na sieciach przypadkowych (A.2, rys. 6, 7), z wyjątkiem grafów Watts-Strogatza z małą wartością  $\beta$ , zbliżonych do sieci regularnej (A.2, rys. 7). Z kolei w ww. pracy [117] nt. modelu głosowania większościowego z bezwładnością autorzy użyli heterogenicznego przybliżenia pola średniego, uważanego za mniej dokładne. Biorąc pod uwagę podobieństwo modeli z prac A.2 i [117], to ostatnie przybliżenie zapewne można również sformułować dla symetrycznego modelu progowego na sieciach przypadkowych. W przypadku modeli kształtowania się opinii z wyborem określonej liczby sąsiadów, niezależnie od stopnia wierzchołka, takich jak  $q$ -voter lub  $q$ -neighbor Ising model, heterogeniczne przybliżenie pola średniego nie poprawia wyników (homogenicznego) przybliżenia pola średniego. Natomiast w przypadku modeli takich jak model głosowania większościowego na sieciach przypadkowych, w tym na sieciach bezskalowych z potęgowym rozkładem stopni wierzchołków, heterogeniczne przybliżenie pola średniego daje dobre przewidywania ilościowe, np. zależność krytycznej wartości szumu (stopnia niezależności agentów) dla wystąpienia przejścia ferromagnetycznego od  $\langle k \rangle^{-3/2}$  [Hanshuang Chen *et al.*, *Phys. Rev. E* **91**, 022816 (2015)]. Rys. 5 z pracy [117] sugeruje jednak, że zgodność z wynikami numerycznymi nie jest doskonała, nawet w przypadku modelu na jednorodnych sieciach przypadkowych Erdösa-Rényi. W związku z tym szkoda, że w pracy A.2 zabrakło porównania przewidywań przybliżenia par (zapewne lepszych) z przewidywaniami heterogenicznego przybliżenia pola średniego.
- Uzasadniając konieczność wprowadzenia nowych modeli kształtowania się opinii społecznej, prowadzących do przejść ferromagnetycznych pierwszego rodzaju, w pracach A.2, A.4, A.5 autorzy argumentują, że w istniejących modelach często obserwuje się jedynie mniej interesujące z punktu widzenia socjologii ciągłe przejścia ferromagnetyczne. Zwracają również uwagę, że modyfikacje np. modelu głosowania większościowego przez wprowadzenie dodatkowego szumu nie prowadzą do wystąpienia przejścia nieciągłego. W tym kontekście cytują m.in. pracę [88] A. Vieira, N. Crokidakis, *Physica A* **450**, 30 (2016) (cytowana jako [14] w pracy A.2, [7] w A.4, [31] w A.5), w której rozpatrzono wpływ niezależności agentów na własności krytyczne modelu głosowania większościowego, uzyskując jedynie ilościowe zmiany w porównaniu z modelem bez niezależności. Wynik ten nie jest bynajmniej niespodziewany, należy bowiem pamiętać, że model głosowania większościowego od początku definiowany jest w istocie jako model z niezależnością agentów (typu annealed), gdyż agenci stosują się do opinii większości jedynie z prawdopodobieństwem  $1 - q$ ,  $0 < q < 1$ , gdzie  $q$  jest parametrem modelu (miarą szumu wewnętrznego). W konsekwencji zaproponowana w ww. pracy Vieiry i Crokidakisa modyfikacja modelu sprowadza się do przeskalowania parametru  $1 - q$ , co nie prowadzi



do zmiany dynamiki (por. A. Krawiecki, T. Gradowski, *Acta Phys. Polonica B Proc. Suppl.* **12**, 91 (2019)).

- Przeprowadzona w pracy A.4 i w mniejszym stopniu w pracy A.5 dyskusja punktów stałych w przybliżeniu pola średniego dla wielostanowego modelu  $q$ -voter pozostawia nieco do życzenia. Mimo wspomnianej w pracy A.4 analogii z modelem Potts'a nie widzę argumentu analitycznego, pozwalającego stwierdzić, że poza punktem stałym, odpowiadającym stanowi paramagnetycznemu, jedynymi istniejącymi (stabilnymi bądź nie) punktami stałymi układu równań (8) są punkty ferromagnetyczne o własności symetrii (9), odpowiadające tylko jednej dominującej opinii lub kilku dominującym opiniom, występującym z jednakowym prawdopodobieństwem w układzie. Z dalszej dyskusji i symulacji numerycznych (rys. 4 w A.4) wynika, że np. w przypadku szumu w postaci niezależności agentów i nieporządku typu „annealed” dla niskich wartości szumu stabilne są tylko punkty ferromagnetyczne z jedną dominującą opinią, pozostałe punkty z więcej niż jedną dominującą opinią o własności symetrii (9) są niestabilnymi punktami siodłowymi. Przeprowadzone symulacje nie wykluczają jednak, że istnieją jeszcze inne punkty stałe, zapewne znacznie bardziej niestabilne, np. mające więcej niż jeden kierunek niestabilny. Nasuwa się tu – bardzo luźne – skojarzenie z modelem Hopfielda sieci neuronowych, w którym w przybliżeniu pola średniego istnieją punkty stałe, odpowiadające różnym przekryciom z kilkoma zapamiętanymi wzorcami, lecz mają one bardzo ograniczone obszary przyciągania.
- W konsekwencji poprzedniej uwagi analiza stabilności punktów stałych, przeprowadzona w pracach A.4, A.5, w szczególności punktu paramagnetycznego w celu wyznaczenia (dolnej) krytycznej wartości szumu wewnętrznego, dotyczy jedynie stabilności względem pojawienia się innych punktów stałych o własności symetrii (9) w A.4 lub (7) w A.5. Jest to warte wzmianki, aczkolwiek wystarczające i potwierdzone zgodnością z wynikami symulacji numerycznych.

Zawarte w niniejszej recenzji uwagi nie umniejszają wysokiej oceny merytorycznej omawianej rozprawy. Rozprawa mgr inż. Bartłomieja Nowaka pt. „Discontinuous phase transitions in discrete opinion dynamics models” zawiera oryginalne, cenne wyniki naukowe. Stwierdzam, że spełnia ona wymogi, stawiane rozprawom doktorskim, i wnoszę o dopuszczenie mgr inż. Bartłomieja Nowaka do dalszych etapów postępowania w przewodzie doktorskim.

Ponadto wnoszę o uznanie rozprawy mgr inż. Bartłomieja Nowaka za wyróżniającą ze względu na jej dużą wartość naukową i znaczenie osiągniętych wyników:

- Wprowadzenie dwóch nowych, oryginalnych modeli kształtowania się opinii społecznej,
- Umiejętne połączenie analizy numerycznej i teoretycznej ww. modeli z wykorzystaniem różnorodnych metod analitycznych,
- Wskazanie warunków, koniecznych do wystąpienia nagłych zmian opinii społecznej, użytecznych również z punktu widzenia socjologii,
- Opublikowanie wyników w prestiżowych czasopismach naukowych, w tym *Scientific Reports* i *Physical Review E*.

Dr hab. inż. Andrzej Krawiecki

