

AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Janusz Edward Jacak

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne - z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

- Mgr inż. fizyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej, 2007
- Mgr inż. informatyki, Wydział Informatyki i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej, 2007
- Dr nauk fizycznych, Instytut Fizyki, Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej, 2011 [data nadania stopnia, 05.07.2011], tytuł rozprawy doktorskiej: *Zastosowanie grup warkoczowych w fizyce układów hallowskich 2D (wyjaśnienie struktury złożonych fermionów) [1-sze miejsce w ogólnokrajowym konkursie Polskiego Towarzystwa Fizycznego na najlepszą rozprawę doktorską (2012)]*

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/artystycznych.

- 01.10.2007 – 05.07.2011 – doktorant w Instytucie Fizyki Politechniki
- 05.09.2011 – 30.09.2013 – asystent w Instytucie Fizyki Politechniki Wrocławskiej
- 01.10.2013 – – adiunkt w Instytucie Fizyki Politechniki Wrocławskiej (od 2014 w Katedrze Technologii Kwantowych na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej po przekształceniu Instytutu Fizyki)

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

a) Przedkładanym osiągnięciem naukowym, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy, jest monotematyczny cykl 15 publikacji (w tym jednej monografii, World Scientific) pod wspólnym tytułem:

Topologiczne efekty kwantowe w niejednostajnych przestrzeniach 2D i zastosowania do fizyki hallowskiej w 2DEG GaAs i w grafenie jednowarstwowym i dwuwarstwowym

b) zestawienie publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

1. **J. Jacak**, 2018, *Application of the path integral quantization to indistinguishable particle systems topologically confined by a magnetic field*, Physical Review **A 97**, 012108-1-11.
2. **J. Jacak**, 2017, *Unconventional fractional quantum Hall effect in bilayer graphene*, Scientific Reports **7**, 8720-1-13 (+ Supplementary Information 1-14).
3. **J. Jacak**, 2018, *Superfluidity of indirect excitons vs quantum Hall correlation in double Hall systems: different types of physical mechanisms of correlation organization in Hall bilayers*, Physics Letters **A**, doi.org/10.1016/j.physleta.2018.07.007.

4. **J. Jacak**, 2018, *Phase diagrams for superfluidity of indirect excitons in double Hall systems GaAs/GaAlAs/GaAs and bilayer-graphene/hBN/bilayer-graphene*, Europhysics Letters, Europhysics Letters **123**, 16001-1-7 (+ Supplementary Materials 1-11) doi.10.1209/0295-5075/123/16001.
5. P. Łydźba, L. Jacak, **J. Jacak**, 2015, *Hierarchy of fillings for the FQHE in monolayer graphene*, Scientific Reports **5**, 14287-1-16.
6. **J. Jacak**, L. Jacak, 2016, *Unconventional FQHE in monolayer and in bilayer graphene*, Science and Technology of Advanced Materials **17**, 149-165.
7. **J. Jacak**, L. Jacak, 2016, *Explanation of $\nu = -\frac{1}{2}$ fractional quantum Hall state in bilayer graphene*, Proceedings of the Royal Society **A 472**, 20150330-1-13.
8. **J. Jacak**, L. Jacak, 2015, *The commensurability condition and fractional quantum Hall effect hierarchy in higher Landau levels*, Pis'ma v ZhETF **102**, 23-29 (JETP Letters **102**, 19-25).
9. **J. Jacak**, L. Jacak, 2015, *Difference in hierarchy of FQHE between monolayer and bilayer graphene*, Physics Letters **A 379**, 2130-2134.
10. **J. Jacak**, L. Jacak, 2013, *On triggering role of carrier mobility for Laughlin state organization*, Pis'ma v ZhETF **98**, 776-781 (JETP Letters **98**, 684-688).
11. P. Łydźba, **J. Jacak**, 2018, *Identifying particle correlations in quantum Hall regime*, Annalen der Physik **530**, 1700221-1-19.
12. P. Łydźba, **J. Jacak**, 2017, *Topological origin and not purely antisymmetric wave functions of many-body states in the lowest Landau level*, Proceedings of the Royal Society **A 473**, 20160758-1-13.
13. **J. Jacak**, P. Łydźba, L. Jacak, 2017, *Topological approach to quantum Hall effects and its important applications: higher Landau levels, graphene and its bilayer*, European Physical Journal **B 90**, 90-1-20.
14. **J. Jacak**, L. Jacak, 2016, *Commensurability condition and hierarchy of fillings for FQHE in higher Landau levels in conventional 2DEG systems and in graphene—monolayer and bilayer*, Physica Scripta **B 90**, 015802-1-13.
15. **J. Jacak**, R. Gonczarek, L. Jacak, I. Jóźwiak, 2012, *Application of Braid Groups in 2D Hall System Physics: Composite Fermion Structure*, ISBN: 978-981-4412-02-5, World Scientific, Singapore, monografia, 1-160.

c) omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania:

1 Streszczenie – główna idea

Osiągnięcie dotyczy sformułowania topologicznego opisu korelacji w płaskim układzie elektronów w polu magnetycznym. Uogólnienie całki Feynmana i zaproponowanie formalizmu cyklotronowych grup warkoczowych umożliwiło zbudowanie topologicznej teorii FQHE¹ zgodnej z eksperymentem i wyjaśniającej niektóre aspekty poprzednich fenomenologicznych modeli FQHE i ich ograniczenia.

¹FQHE – ułamkowy kwantowy efekt Halla, IQHE – całkowity kwantowy efekt Halla

Zasadniczym rezultatem dla formalizmu rozwiniętego w ramach osiągnięcia naukowego jest oryginalne wykazanie, że kwant strumienia pola magnetycznego zależy od homotopii trajektorii w przypadku niejednorodnej² przestrzeni 2D z topologią modyfikowaną przez pole magnetyczne. Ten ścisły wynik autor uzyskał przez uogólnienie na wielospójną przestrzeń reguły Bohra-Sommerfelda. Reguła ta zastosowana do składowych x i y pędu kinematycznego w 2D w obecności prostopadłego pola magnetycznego pozwala na określenie kwantu strumienia tego pola, czyli minimalnej wielkości orbity cyklotronowej. Składowe $\hat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ i $\hat{P}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - eBx$ (w cechowaniu Landaua) tworzą parę kanonicznie sprzężonych wielkości i zastosowanie do nich uogólnionej reguły Bohra-Sommerfelda prowadzi do definicji kwantu strumienia pola B , $\Phi_k = (2k+1)\frac{h}{e}$, gdzie k jest liczbą pętli w warkoczach (albo $2k+1$ jest ilością pętli orbity cyklotronowej) w wielospójnej przestrzeni konfiguracyjnej wielu elektronów na płaszczyźnie, i tylko dla $k=0$, $\Phi_0 = \frac{h}{e}$. Wielopętlowe warkoczki są elementami pełnej grupy warkoczowej B_N dla przestrzeni konfiguracyjnej N elektronów na płaszczyźnie³. Grupa B_N jest generowana przez generatory σ_i – zamiany sąsiednich cząstek, i -tej z $(i+1)$ -szą. Zatem w tej grupie są też elementy w naturalny sposób wielopętlowe, σ_i^{2k+1} , $k=1, \dots$, które też są zamianami cząstek (warkoczami) ale z k dodatkowymi pętlami. W prostopadłym polu magnetycznym warkoczki muszą być zbudowane z połówek trajektorii cyklotronowych, zatem mają ograniczone rozmiary, ponieważ w 2D trajektorie cyklotronowe mają ograniczone rozmiary określone przez kwant strumienia (w przeciwieństwie do 3D, gdzie ruch spiralny wzdłuż pola ma dowolny zasięg). Warkoczki σ_i mają zasięg orbity Φ_0/B , natomiast warkoczki σ_i^{2k+1} mają $2k+1$ razy większy zasięg orbity Φ_k/B . W przypadku pełnego wypełnienia najniższego poziomu Landaua (LLL), $N=N_0$, (gdzie $N_0 = \frac{eBS}{h}$ to degeneracja LL, N to liczba elektronów, S powierzchnia układu), czyli $\frac{S}{N} = \frac{h}{eB}$ i warkoczki σ_i o zasięgu Φ_0/B idealnie pasują do odległości między odpychającymi się kulombowsko elektronami na jellium i σ_i realizują zamiany – wtedy organizuje się stan IQHE, $\nu = \frac{N}{N_0} = 1$. Gdy pole magnetyczne wzrośnie np. 3 krotnie, to degeneracja także wzrośnie 3 krotnie i współczynnik wypełnienia wyniesie $\nu = 1/3$. Warkoczki σ_i są w tak silnym polu zbyt krótkie w stosunku do odległości cząstek, ale warkoczki σ_i^3 o zasięgu $\Phi_1/(3B)$ idealnie pasują teraz do odległości elektronów $\frac{S}{N}$, zatem σ_i^3 są teraz nowymi generatorami zamian i generują podgrupę pełnej grupy warkoczowej, którą nazywamy cyklotronową podgrupą warkoczową.

Funkcje falowe układu oddziałujących cząstek muszą się transformować zgodnie z jednowymiarową unitarną reprezentacją (1DUR) grupy warkoczowej przy zamianach argumentów funkcji falowej wg warkoczki (zamianach argumentów funkcji falowej – czyli klasycznych położeniach cząstek). Dla elektronów (fermionów) 1DUR $\sigma_i \rightarrow e^{i\pi}$, natomiast dla cyklotronowej podgrupy 1DUR $\sigma_i^3 \rightarrow e^{i3\pi}$, co daje dokładnie korelacje Laughlina dla stanu FQHE przy $\nu = 1/3$. Ten najprostszy przykład pokazuje topologiczną przyczynę formowania się FQHE, a obserwowana 'magiczna' hierarchia wypełnień dla FQHE wynika z faktu, że liczba pętli jest zawsze całkowita (σ_i^{2k+1} jest warkoczem zamiany z k dodatkowymi pętlami) a kolektywny stan skorelowany powstaje tylko wtedy gdy zamiany są dopuszczalne i definiowana jest statystyka kwantowa, tj. gdy pętle warkoczki idealnie pasują do odległości między odpychającymi się elektronami na jellium (uwzględniając bliższych i dalszych sąsiadów), co prowadzi do skokowo zmieniających się wzorców współmierności – dyskretnych faz homotopii – hierarchii FQHE.

Grupy warkoczowe definiują dziedzinę całkowania po trajektoriach w schemacie kwantowania Feynmana i wprowadzone podgrupy cyklotronowe okazują się tu kluczowe dla wielospójnych przestrzeni z kwantującym

²Przestrzeń \mathcal{A} jest jednorodna kiedy jej grupa homotopii $\pi_1(\mathcal{A}) = \varepsilon$ (element neutralny), tzn. jest trywialna (wszystkie zamknięte trajektorie można 'ściągnąć' do punktu w przestrzeni jednorodnej); przestrzeń jest niejednorodna (wielospójna) kiedy $\pi_1(\mathcal{A}) \neq \varepsilon$ (istnieją w niej nieekwiwalentne topologicznie trajektorie).

³ $B_N = \pi_1(\Omega)$, $\Omega = (M^N - \Delta)/S_N$, gdzie π_1 to pierwsza grupa homotopii, Ω to przestrzeń konfiguracyjna układu N nierozróżnialnych cząstek na rozmaitości M (w naszym przypadku $M = R^2$), Δ to podzbiór punktów diagonalnych w N -krotnym iloczynie M^N , usunięty dla zachowania liczby cząstek, a struktura ilorazowa przez grupę permutacji S_N wprowadza nierozróżnialność jednakowych cząstek

polem magnetycznym i dają się precyzyjnie matematycznie uwzględnić w formalizmie całek po trajektoriach dla układów wielu cząstek. Przedstawione wyżej zauważenie co do specyfiki tego kwantowania daje się uogólnić na cały obszar fizyki hallowskiej różnych materiałów i w kompletny sposób wyjaśnia hierarchię FQHE, IQHE oraz stanów ułamkowo wypełnionych w wyższych poziomach Landaua konwencjonalnych układów 2DEG GaAs, grafenu jednowarstwowego, grafenu dwuwarstwowego a nawet ułamkowych topologicznych izolatorów Cherna (gdzie rolę pola magnetycznego przejmuje pole Berry), uwzględniając przy tym też stany metalu Halla i hallowskie stany sparowane. Rozwinięta topologiczna teoria homotopii dla FQHE wyjaśnia wszystkie obecnie zaobserwowane eksperymentalnie wypełnienia ułamkowej hierarchii FQHE, podaje funkcje falowe i energie stanów FQHE w bardzo dobrej zgodności z numerycznymi dokładnymi diagonalizacjami i eksperymentalnie mierzonymi energiami aktywacji. Teoria ta jest nowym wyjaśnieniem FQHE, uwzględnia stany ułamkowe hierarchii niedostępne dla konwencjonalnych modeli a obserwowane obecnie licznie w eksperymencie w LLL i wyższych LL w GaAs a zwłaszcza w grafenie jednowarstwowym i dwuwarstwowym. Topologiczna teoria pozwala na wskazanie istoty i ograniczeń wcześniejszych sformułowań fenomenologicznych teorii FQHE, jak modelu złożonych fermionów (CF) czy wieloskładnikowych stanów Halperina⁴. Jest ulokowana w formalizmie całki Feynmana po trajektoriach rozwiniętej oryginalnie na przypadek wielospójnych przestrzeni 2D modyfikowanych polem magnetycznym (lub polem Berry). Istotnym wynikiem jest odtworzenie po raz pierwszy krzywej rezystancji podłużnej, $R_{xx}(\nu)$, w LLL dla 2DEG GaAs w wyniku rozwinięcia całki Feynmana dla stanów niestacjonarnych poprzez sumowanie po fazach homotopii konkurujących energetycznie ze sobą przy tym samym ν i dającym wkład do całki po trajektoriach w różnym stopniu w zależności od ν . Metoda okazała się też użyteczna do wyjaśnienia złożonych korelacji w podwójnych układach hallowskich z włączonym lub wyłączonym tunelowaniem międzywarstwowym. Szczegółowy opis osiągnięcia przedstawiony jest poniżej.

2 Opis szczegółowy

2.1 Wprowadzenie

Osiągnięcie naukowe pt. *”Topologiczne efekty kwantowe w niejednostopójnych przestrzeniach 2D i zastosowania do fizyki hallowskiej w 2DEG GaAs i w grafenie jednowarstwowym i dwuwarstwowym”* obejmuje 14 publikacji w czasopiśmie międzynarodowym [1–15]⁵ i monografię (World Scientific) [16] (średni IF [1, 2, 5, 6, 9, 12, 13], 3.3). Publikacje włączone do osiągnięcia naukowego wybrane są z łącznie 29 publikacji autora na ten temat [1–29] (24 po doktoracie). Monografia [16] wydana w 2012 roku zawiera w swojej części obok nowych treści (ok. w połowie) także opis stanu koncepcji rozwijanej wcześniej w pracy doktorskiej autora z 2011 roku i stanowi punkt wyjścia dla dalszego rozwoju teorii, prace włączone do osiągnięcia [1–15] są całkowicie nowe tematycznie w stosunku do prac z doktoratu [18, 23, 24, 26, 27], zwłaszcza odnośnie grafenu i hierarchii FQHE w LLL i w wyższych LL oraz hallowskich układów podwójnych. Osiągnięcie dotyczy nowatorskiego rozwinięcia zastosowania grup homotopii w formalizmie całek Feynmana po trajektoriach w niejednostopójnych przestrzeniach konfiguracyjnych wielo-elektronowych płaskich układów z oddziaływaniem w topologii modyfikowanej silnym polem magnetycznym. Pokazujemy, że w dostatecznie silnym polu magnetycznym w takich układach dochodzi do innego specyficznego kwantowania strumienia pola magnetycznego i kwantowych przejść fazowych homotopii definiujących wzorce korelacji wywołane oddziaływaniem w sposób dostosowany do zmieniających się warunków kwantowania. Opisane w ten sposób topologiczne zachowanie

⁴Zasadniczy fakt zmiany kwantu strumienia pola magnetycznego w niejednostopójnej przestrzeni był przeoczony we wcześniejszym (lokalnym, nietopologicznym) opisie FQHE i dlatego opis ten musiał posiłkować się sztucznymi pomocniczymi obiektami jak CF.

⁵W tym zestawieniu wymieniono oddzielnie pozycję [8] dla potrzeb cytowania.

płaskich układów okazuje się przydatne do wyjaśnienia niektórych niezrozumiałych wcześniej aspektów fizyki FQHE w 2DEG GaAs, a zwłaszcza w grafenie jednowarstwowym i dwuwarstwowym. W tym ostatnim przypadku, zaobserwowany ostatnio (2016 [30]) niekonwencjonalny FQHE udaje się wytłumaczyć właśnie poprzez specyficzne topologiczne uwarunkowania [2], silnie wzmacniając tym przekonanie co do centralnej roli homotopii w organizacji skorelowanych stanów dwuwymiarowej cieczy elektronowej w kwantującym polu magnetycznym.

Odkrycie FQHE eksperymentalnie przez Tsui, Störmera i Gossarda w 1982 r [31] i podanie odpowiedniej wielocząstkowej funkcji falowej przez Laughlina [32] uznane zostało za jedno z najważniejszych dokonań fizyki fazy skondensowanej (nagroda Nobla 1998, Tsui, Störmer, Laughlin), ponieważ po ponad połowie stulecia od sformułowania mechaniki kwantowej napotkano na kwantowy fenomen wykraczający poza wcześniej przyjęte jej ramy, co wiąże się najwyraźniej z jego topologicznym charakterem. Fenomen ten przejawia się w postaci ułamkowej hierarchii zapełnień poziomów Landauowskich, $\nu = \frac{N}{N_0}$ (N liczba elektronów, N_0 degeneracja poziomu Landaua), z charakterystycznym podobnym jak dla IQHE kwantowaniem rezystancji Halla, $R_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}$ i znikaniem rezystancji podłużnej R_{xx} , hierarchii zaskakująco uniwersalnej i jednakowej dla całkowicie różnych mikroskopowych realizacji układów 2D (np. w GaAs [33] albo w grafenie w polu magnetycznym [30, 34, 35], czy nawet w ułamkowym topologicznym izolatorze Cherna bez jednorodnego pola magnetycznego [36–38]), kiedy wspólnym ich mianownikiem jest właśnie dwuwymiarowa specyfika homotopii trajektorii w odpowiedniej całce Feynmana. Mimo licznych wysiłków nie wyjaśniono wcześniej w ramach 'lokalnej' (tj. bez uwzględnienia topologii) fizyki kwantowej przyczyny egzotycznych korelacji FQHE przejawiających się w postaci funkcji Laughlina i hierarchii FQHE. Fenomenologicznie opisano je natomiast po części przez model tzw. złożonych fermionów [39] (*CF composite fermions*) posługujący się fikcyjnym pomocniczym polem, którego kwanty strumienia miały być przyczepiane do poruszających się elektronów i miały odtwarzać korelacje Laughlina dzięki efektowi typu Aharonova-Bohma [40, 41]. Od razu należy zauważyć, że skuteczność CF wiąże się z ich niejawnym topologicznym charakterem, CF nie są mimo deklaracji [40] kwazicząstkami – zarówno kwanty strumienia 'doczepiane' do elektronów jak i faza Aharonova-Bohma są efektami nielokalnymi i wiążą się z trajektoriami. Poglądowy model CF okazał się użyteczny zwłaszcza z powodu odwzorowania stanów dla ułamkowych zapełnień w najniższym poziomie Landaua (LLL, lowest Landau level) na pełne zapełnienia wyższych poziomów Landaua (LL) w efektywnym polu osłabionym przez średnie pole doczepionych strumieni i skuteczne przewidzenie w ten sposób części hierarchii FQHE w LLL [40]. Jednakże w ostatnich latach pojawiło się dużo nowych danych eksperymentalnych, zarówno w kwazi-dwuwymiarowym układzie 2DEG GaAs [33, 42–45] a przede wszystkim w grafenie [30, 34, 35, 46, 47] wykraczających poza konwencjonalny model CF. Wyjątkowo duże trudności interpretacyjne napotkano w przypadku eksperymentów hallowskich w dwuwarstwowym grafenie [30, 35, 48].

Należy dodać, że równocześnie obok modelu CF rozwijane były i inne podejścia do wyjaśnienia złożonej egzotycznej fizyki eksperymentalnej FQHE, jak hierarchia HH (Haldane, Halperin [49, 50]), czy wieloskładnikowe uogólnienia funkcji Laughlina (Halperin [51]). Hierarchia HH (kolejnych generacji anyonów) została wcześniej odrzucona z powodu nierealistycznego jej charakteru (w kolejnych generacjach anyonów ich rozmiar szybko osiągał rozmiary całego układu) [49], natomiast wieloskładnikowe stany Halperina dobrze, choć wybiórczo, zgadzają się z dokładnymi diagonalizacjami oddziaływania w małych modelach na sferze Haldane'a lub na torusie [52–54], konkurując z modelem CF w tym względzie, nie wyjaśniają jednak istoty zjawiska FQHE. Wykazanie z kolei przez Haldane'a [36] (uwzględnione po części w nagrodzie Nobla 2016), że kwantowy efekt Halla nie musi być związany z poziomami Landaua, podkreśliło istotność dostrzeganych wcześniej topologicznych uwarunkowań hallowskiej fizyki i FQHE [32, 55]. Zauważono też typową hierarchię ułamkową w analogii do FQHE w symulacjach numerycznych topologicznego izolatora Cherna, bez pola zewnętrznego, czyli bez poziomów Landaua, ale przy charakterystycznych ułamkowych zapełnieniach sieci

krystalicznej na węzłach w geometrii 2D [37, 38], co wyraźnie wskazuje na uniwersalny charakter FQHE w układach 2D.

Głównym aspektem przestawianego osiągnięcia naukowego jest sformułowanie matematycznie ścisłego topologicznego modelu wielo-elektronowego układu z oddziaływaniem w 2D z kwantującym czynnikiem, co pozwoliło na wyjaśnienie uniwersalności FQHE w bardzo dobrej zgodności z dostępnymi obecnie danymi eksperymentalnymi dla różnych wymienionych wyżej układów.

Topologiczne sformułowanie [1, 2, 5, 8, 16] rozwiązuje zasadniczy problem w fizyce hallowskiej – zagadkowe występowanie tej samej hierarchii FQHE mimo znacznych różnic materiałowych w różnych układach (GaAs, grafen i inne). Przyczyna tego faktu obserwacyjnego ukryta była i niezauważona w lokalnych podejściach, jak np. w dokładnych diagonalizacjach oddziaływania przy argumentowaniu, że to jednocząstkowe stany w danym materiale (w bazie których dokonuje się diagonalizacji) decydują o hierarchii. To mylące, ponieważ o hierarchii decyduje niejawnie, ale ujęta też w dokładnej diagonalizacji, współmierność cyklotronowej skali (dla danego pola B i danego LL) ze sztywno przyjmowaną ilością cząstek (kilkunastu, najwyżej 20-tu z powodu trudności obliczeniowych w diagonalizacjach numerycznych [52–54, 56]) i sztywno zadaną w numerycznym rachunku powierzchnią układu, a nie sama tylko postać funkcji jednocząstkowych. Ta ostatnia decyduje dopiero o wielkości energii aktywacji dla stanów wybranych przez współmierność. W ujęciu całki Feynmana jest to lepiej zauważalne, gdyż współmierność jawnie wchodzi wraz z oddziaływaniem do sumowania po klasach homotopii trajektorii (oddziaływanie warunkuje współmierność, jak będzie to przedstawione poniżej), a oprócz tego oddziaływanie wchodzi też do lagranżjanu w działaniu i tam jest miejsce na 'ekwiwalentność' do samej 'diagonalizacji' oddziaływania. W tzw. dokładnej diagonalizacji⁶ oba te kanały wchodzenia oddziaływania też są obecne, choć pierwszy jest trudniej dostrzegalny i stąd interpretacyjne nieporozumienie literaturowe odnośnie uwarunkowania hierarchii ułamkowej [53, 54].

$$\langle z_1, \dots, z_N | e^{-i\hat{H}(t'-t)/\hbar} | z'_1, \dots, z'_N \rangle = \sum_{l \in \pi_1} e^{i\alpha_l} \int d\lambda_l e^{iS[\lambda_l]/\hbar}, \quad S[\lambda_l] = \int_t^{t'} L[\lambda_l] dt, \quad L = T - V$$

Rysunek 1: Symbolicznie zaznaczone dwa kanały wchodzenia oddziaływania elektronów w całce Feynmana po trajektoriach w układzie hallowskim (λ_l trajektoria łącząca punkty z_1, \dots, z_N dla t i z'_1, \dots, z'_N dla t' w przestrzeni konfiguracyjnej N nieodróżnialnych cząstek w l -tym sektorze dziedziny z lokalną miarą w przestrzeni trajektorii $d\lambda_l$, π_1 grupa warkoczowa numerująca sektory, $e^{i\alpha_l}$ jednowymiarowa unitarna reprezentacja grupy warkoczowej, $S[\lambda_l]$ funkcjonal działania, L lagranżjan, \hat{H} hamiltonian.

2.2 Zasady zaproponowanego modelu topologicznego

Punktem wyjścia modelu topologicznego jest podstawowa grupa homotopii π_1 [16, 57, 58], tj. zbiór rozłącznych klas pętli trajektorii w danej przestrzeni, których nie można przeprowadzić jedno w drugie ciągłą deformacją. Dla przestrzeni konfiguracyjnej N nieodróżnialnych cząstek na płaszczyźnie π_1 jest nieskończoną przeliczalną grupą zwaną grupą warkoczową B_N (grupa Artina) [57], zupełnie inną niż grupa π_1 dla przestrzeni konfiguracyjnej N nieodróżnialnych cząstek w przestrzeni 3D (lub w wyższych wymiarach), gdzie π_1 jest skończoną grupą permutacji S_N . Ta właśnie bogata struktura homotopii trajektorii w 2D (na płaszczyźnie i też na rozmaitościach lokalnie 2D, jak sfera czy torus [16, 59]) stoi w tle egzotycznej fizyki hallowskiej.

⁶Dokładna diagonalizacja [53, 54] polega tu na diagonalizacji macierzy oddziaływania elektronów w bazie utworzonej z anty-symetryzowanych iloczynów jednocząstkowych stanów landauowskich w wybranym LL; jest to standardowa procedura numeryczna dostępna np. <http://www.nick-ux.org/diagham/index.php?LG=en>.

Trajektorie wielu cząstek na płaszczyźnie splątują się ze sobą tworząc warkocze (stąd nazwa grupy) w sposób niespotykany w wyższych wymiarach i dotyczy to też zamkniętych pętli w przestrzeni konfiguracyjnej nierozróżnialnych cząstek budujących tu grupę homotopii π_1 [16, 57, 60], kiedy układ cząstek przechodzi sam w siebie z dokładnością tylko do przenumerowania nieodróżnialnych cząstek. Takie pętle (a raczej ich klasy [16, 57, 58]) definiują grupę π_1 , i w przypadku płaszczyzny 2D, grupę $B_N = \pi_1(\Omega)$ – grupę warkoczową dla N cząstek na płaszczyźnie, gdzie $\Omega = (M^N - \Delta)/S_N$ jest przestrzenią konfiguracyjną N nierozróżnialnych cząstek na rozmaitości M (tutaj $M = R^2$), Δ to zbiór punktów diagonalnych w M^N , odjęty dla zachowania liczby cząstek, dzielenie przez S_N (grupę permutacji) zapewnia nierozróżnialność cząstek [16, 61]. Elementami B_N są zatem trajektorie zamian cząstek (warkocze), a wielocząstkowa funkcja falowa całego układu, $\Psi(z_1, \dots, z_N)$, musi się przy tych zamianach transformować wg jednowymiarowej unitarnej reprezentacji (1DUR, *one dimensional unitary representation*) grupy warkoczowej [60, 62–64]. W odniesieniu do wielocząstkowej funkcji falowej, $\Psi(z_1, \dots, z_N)$, ($z_i = x_i + iy_i$ jest zespoloną reprezentacją położenia i -tej cząstki na płaszczyźnie), zamiany położeń cząstek odpowiadają zamianie argumentów funkcji falowej $\Psi(z_1, \dots, z_N)$ (argumenty te, to klasyczne położenia cząstek, w kwantowym opisie brak trajektorii cząstek). O ile w 3D te zamiany to zwykle permutacje indeksów, to w 2D są to inne niż permutacje zamiany położeń (argumentów funkcji falowej) zależne od sposobu ich realizacji warkoczami na płaszczyźnie, a nie tylko zmiany numerów argumentów jak w 3D. We wszystkich sytuacjach zamian cząstek istotne są unitarne reprezentacje grup warkoczowych dla określenia zmiany fazy funkcji falowej przy zamianie cząstek wg danego warkocza, co oznacza określenie statystyki kwantowej tych cząstek. Zatem: tyle ile jest różnych jednowymiarowych unitarnych reprezentacji grupy warkoczowej, tyle jest możliwych kwantowych realizacji tego samego klasycznego wielocząstkowego układu [63, 64]. W 3D dla grupy permutacji S_N (grupy warkoczowej w 3D) istnieją tylko dwie jednowymiarowe unitarne reprezentacje odpowiadające bozonom i fermionom. W 2D grupa B_N ma dużo więcej reprezentacji odpowiadających anyonom z ułamkowymi statystykami [55, 63]. To było wiadomo wcześniej [55, 60, 62, 63] i jak się okazało, nie wyczerpało bogactwa homotopii w 2D, zwłaszcza w obecności silnego kwantującego pola magnetycznego.

2.3 Warkoczowe podgrupy cyklotronowe

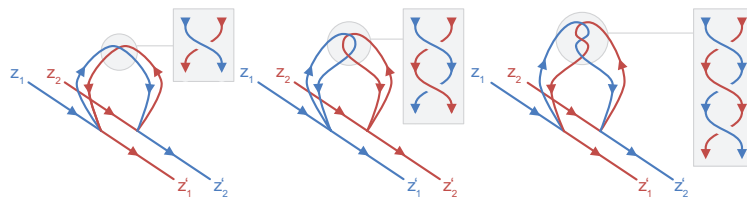
Zasadniczym osiągnięciem autora jest wykazanie, że w przypadku silnego pola magnetycznego prostopadłego do płaszczyzny z oddziałującymi elektronami, pełna grupa warkoczowa musi zostać zastąpiona przez jej podgrupę, kiedy pole jest tak silne, że trajektorie cyklotronowe są mniejsze od odległości między elektronami równoodległymi na płaszczyźnie w wyniku oddziaływania Coulomba (klasyczne elektrony tworzą trójkątną sieć Wignera w $T = 0$ K ze stałymi odległościami z powodu odpychania elektronów – jest to najniższy energetycznie stan klasyczny układu elektronów na płaskim dodatnim jellium). W obecności pola magnetycznego warkocze naładowanych cząstek muszą być zbudowane z połówek orbit cyklotronowych – inne trajektorie tu nie istnieją [7, 16, 18, 23, 27]. W przypadku 2D te cyklotronowe trajektorie mają ograniczone rozmiary (w przeciwieństwie do 3D z dowolnym zasięgiem trajektorii wzdłuż pola), co nie pozwala na zamiany cząstek w 2D, jeśli warkocze nie sięgają do najbliższych sąsiadów [1, 16]. Statystyka nie może być wtedy ustalona – pole magnetyczne zmieniło w tym przypadku topologię (homotopię) trajektorii w przestrzeni konfiguracyjnej. Zbyt krótkie warkocze nie mogą wejść do grupy warkoczowej, ponieważ nie mogą być realizowane. Pojawia się tu jednak, wyłącznie w 2D, nowa okoliczność. Wielopętłowe warkocze mają większy zasięg. Wielopętłowe warkocze były też w oryginalnej pełnej grupie warkoczowej ze względu na jej algebraiczną strukturę – pełna grupa warkoczowa zadana jest przez generatory, σ_i , tj. elementarne zamiany cząstek sąsiadów i -tego z $i + 1$ -szym, zatem wielopętłowe warkocze, σ_i^q ($q = 2k + 1$ nieparzystym, by były to także zamiany choć z k dodatkowymi pętlami [8, 16, 27]), też należą do tej grupy. Warkocze σ_i^q generują podgrupę pełnej grupy i ta

podgrupa zastępuje pełną grupę warkoczową – nazywamy ją cyklotronową podgrupą warkoczową [7, 8, 16]. Jej elementy, wielopętlowe warkocze:

1. sięgają elektronów zbyt odległych dla warkoczy bez pętli,
2. mają inne jednowymiarowe unitarne reprezentacje dokładnie definiujące właśnie egzotyczne korelacje Laughlina.

Własność 1. wynika z geometrii 2D, kiedy strumień pola magnetycznego musi być rozdzielony na poszczególne pętle wielopętlowej trajektorii, ponieważ w 2D wielopętlowa jak i jednopętlowa trajektoria obejmują tę samą powierzchnię (w 3D jest inaczej, każda nowa pętla np. solenoidu 3D dodaje swoją powierzchnię do całego strumienia, a w 2D nie) – co powoduje efektywnie wzrost rozmiarów pętli w wielopętlowej trajektorii 2D [1, 8, 16]. Fakt ten został udowodniony przez autora formalnym uogólnieniem reguły Bohra-Sommerfelda dla przestrzeni niejednostopnej [1]. W tym istotnym dowodzie zostało pokazane, że znajdowany przez zastosowanie reguły Bohra-Sommerfelda do niekomutujących składowych pędu kinematycznego w 2D w obecności prostopadłego pola magnetycznego, *kwant strumienia tego pola (a zatem i rozmiar cyklotronowej orbity)* jest $2k + 1$ razy większy w przypadku wielopętlowych trajektorii w niejednostopnych przestrzeniach (k oznacza liczbę dodatkowych pętli w warkoczu, albo $2k$ dodatkowych pętli cyklotronowych, ponieważ warkocze budowane są z połówek trajektorii cyklotronowych [8, 16, 27]).

Z kolei własność 2. wynika z postaci reprezentacji 1DUR dla podgrupy cyklotronowej [9, 16, 23]: $\sigma_l^q \rightarrow e^{iq\pi}$ kiedy wybraliśmy $\sigma_l \rightarrow e^{i\pi}$, tj. z ogólnej 1DUR, $e^{i\alpha}$, $\alpha = \pi$, jako dla wyjściowych fermionów, co w naturalny sposób tłumaczy korelacje statystyczne Laughlina w FQHE (tj. przesunięcie fazowe $q\pi$ zamiast π przy zamianach argumentów wielocząstkowej funkcji falowej), omijając w ten sposób sztuczną konstrukcję CF dla tłumaczenia dodatkowego przyrostu fazy Laughlina przez efekt Aharonova-Bohma. Jest to w podejściu topologicznym niepotrzebne, przy czym w pracach autora wykazano jakiej sytuacji topologicznych homotopii odpowiadają CF, które przy pomocy kwantów fikcyjnego pola doczepianych do elektronów modelują w istocie dodatkowe pętle warkoczowe (jeden 'doczepiony' kwant strumienia – *flux*, to jedna dodatkowa pętla – czyli w modelu CF dodaje się w istocie nie *fluxy* a dodatkowe pętle cyklotronowe⁷), a w jakiej koncepcja doczepianych kwantów pola do elektronów zawodzi i nie odpowiada homotopiom trajektorii.



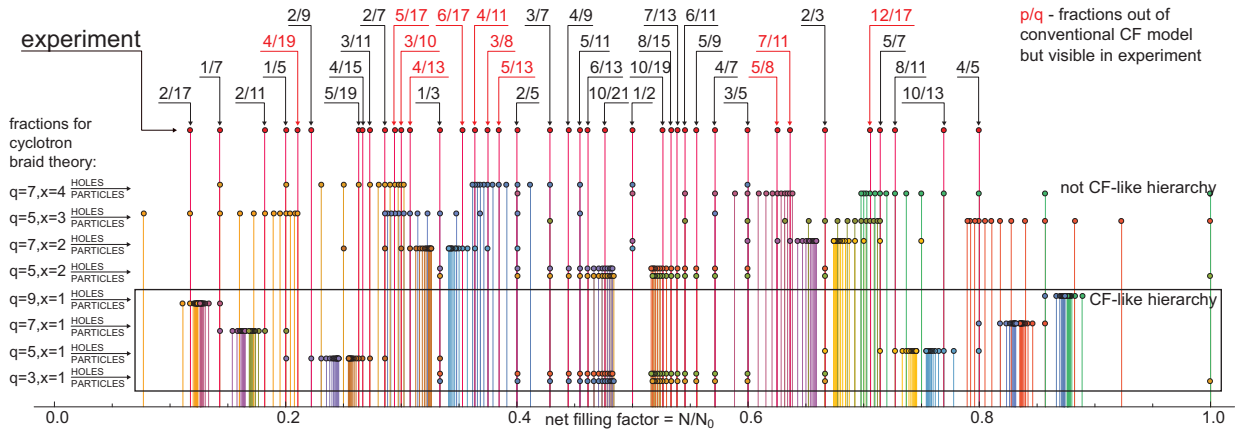
Rysunek 2: Przykłady dołączania warkoczy do wielocząstkowej trajektorii – dziedzina trajektorii rozpada się na rozłączne (niehomotopijne) sektory

2.4 Ulokowanie warkoczowych podgrup cyklotronowych w formalizmie Feynmana całki po trajektoriach

Prezentowana teoria warkoczowa ma formalny matematyczny charakter grup homotopii π_1 [58] i odwołuje się do całek po trajektoriach Feynmana [65, 66] dla opisu kwantowego układu wielu cząstek z oddziaływaniem. Całki Feynmana definiują propagator, czyli zespolony element macierzowy operatora ewolucji w

⁷Kwenty strumienia, *flux quanta* (w skrócie *fluxy*), to kwaziklasyczne rozciągłe obiekty charakteryzujące trajektorie – nie jest jasne jak mogą być 'doczepiane' do elektronów by tworzyć 'kwazicząstki' CF i odbywać z nimi dynamikę wg modelu CF [40].

reprezentacji położeniowej (Rys. 1). Całkowanie po wszystkich trajektoriach musi być uzupełnione (w przypadku niejednorodnej przestrzeni konfiguracyjnej [58], czyli takiej, dla której grupa π_1 jest nietrywialna, jak w szczególności grupa warkoczowa) o sumowanie po elementach π_1 (po warkoczach), ponieważ do każdej otwartej trajektorii w całości Feynmana może być dołączona 'po drodze' w dowolnym punkcie otwartej trajektorii pętla warkocza (Rys. 2) i w ten sposób cała przestrzeń trajektorii rozpada się na sumę niehomotopijnych (jak warkocze w π_1) poddziedzin całkowania po trajektoriach [1, 7, 8]. Z powodu nieciągłości między niehomotopijnymi segmentami dziedziny nie można zdefiniować wspólnej miary trajektorii na całej dziedzinie całki, a tylko oddzielnie na poddziedzinach. Całka Feynmana musi uwzględnić zatem sumowanie po poddziedzinach z unitarnymi (ze względu na przyczynowość) czynnikami fazowymi (wagami), które tworzą jednowymiarową unitarną reprezentację (1DUR) grupy warkoczowej [64], albo jej podgrupy cyklotronowej w przypadku kwantującego magnetycznego pola (jak dla ułamkowych zapełnień, dla których jednopętlowe cyklotronowe warkocze są krótsze od odległości między cząstkami) [1, 6, 14, 16, 26]. Te reprezentacje [55, 60, 64] definiują kwantowe statystyki, w tym też dla specyficznych ułamkowych zapełnień poziomu Landaua odpowiadających FQHE (czyli statystyki Laughlina, w najprostszym przypadku FQHE) wtedy, kiedy tylko wielopętlowymi warkoczami można osiągnąć sąsiednich cząstek. Możliwe jest to jednak tylko dla dyskretnych 'magicznych' wartości ułamkowych zapełnień $\nu = \frac{N}{N_0}$ poziomów Landaua (N liczba cząstek, $N_0 = \frac{BSe}{h}$ degeneracja jednocząstkowych poziomów Landaua), z uwagi na wymogi współmierności⁸ – powstaje specyficzna fraktalna struktura tych zapełnień, nazywana hierarchią zapełnień FQHE (i obserwowana eksperymentalnie w ponad 150 detalach w konwencjonalnym 2DEG GaAs i w grafenie). Dopuszczalne korelacje są tu wynikiem oddziaływania i wymogów współmierności. Struktura tej współmierności (szczegółowo opisana w serii prac autora [2, 5–9, 11–16, 27]) idealnie odpowiada obserwowanej eksperymentalnie hierarchii kolektywnych stanów FQHE, także tych nieopisanych konwencjonalnym modelem CF, ale również obserwowanych eksperymentalnie. Współmierność dotyczy może wielopętlowych cyklotronowych warkoczy z najbliższymi sąsiadami lub z dalszymi sąsiadami. Współmierności z dalszymi sąsiadami (trajektorii wielopętlowych i także jednopętlowych) nie dają się ująć w konwencjonalnym modelu CF.



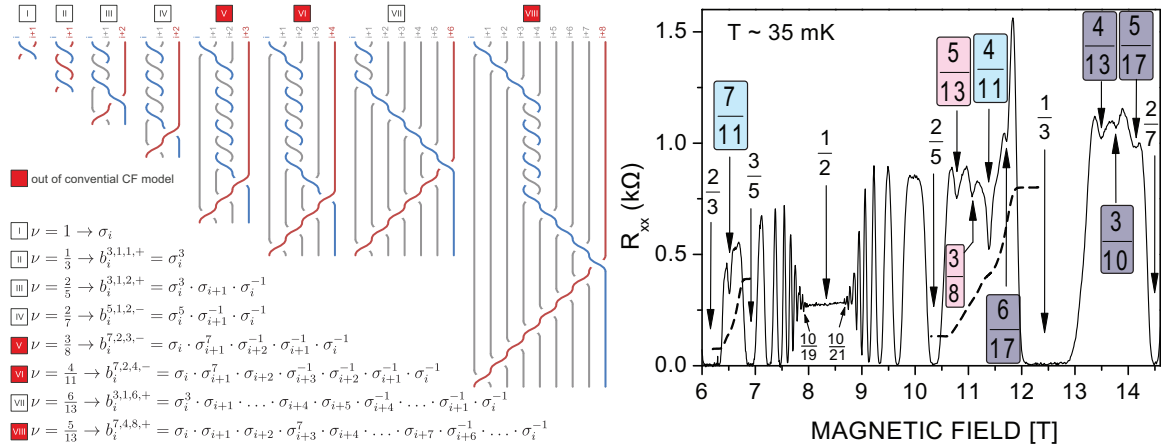
Rysunek 3: Porównanie eksperymentalnie obserwowanej hierarchii FQHE w LLL (GaAs) z ogólną hierarchią warkoczową $\nu = \frac{xy}{(q-1)y \pm x}$, hierarchia CF zaznaczona ramką, kolorem czerwonym zaznaczone stany *enigmatic* nie występujące w hierarchii CF (zaznaczony metal Hala w 1/2) [1, 8]

Wynikająca ze współmierności dyskretna ułamkowa struktura nawiązuje w pewnym stopniu do rów-

⁸Istotnym tu czynnikiem jest degeneracja LL, zapewnia jednorodność orbit cyklotronowych niezbędną dla współmierności i jest jednakowa (nie psuje uniwersalności hierarchii) w podpasmach GaAs i w grafenie, gdyż wynika z własności operatorów drabinkowych oscylatora [16] niezależnie od pola krystalicznego (dla izolatora Cherna z płaskim pasmem degeneracja jest równa ilości komórek elementarnych).

niez fraktalnej dyspersji poziomów Landaua rozpatrywanej w latach 60. w kryształ 2D przez Azbela [67] (graficznie zobrazowanej później jako fraktalny motyl Hofstadtera [68]). W przypadku FQHE współmierność cyklotronowych orbit odnosi się do sieci Wignera samych elektronów o skali długości magnetycznej $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$. Dla B odpowiadającego $\nu = 1$ w GaAs, $l_B \simeq 10$ nm a więc jest prawie 2 rzędy większa od skali stałej sieci kryształu i dlatego efekt współmierności cyklotronowej z siecią Wignera widoczny jest w polach rzędu 20 T w postaci hierarchii FQHE (podczas gdy obserwacja motyla Hofstadtera wymagałaby nierealistycznego eksperymentalnie natężenia pola $\sim 10^5$ T, dla stałej sieci ~ 0.2 nm). Dodatkowo należy podkreślić, że hierarchia Hofstadtera-Azbela nie miała pełnego uzasadnienia a współmierność skal była abstrakcyjna, podczas gdy w przypadku FQHE lukę tę wypełnia warkoczowa wielopętłowa struktura homotopii trajektorii realizująca współmierność i równocześnie determinująca związaną statystykę kwantową poprzez unitarne reprezentacje cyklotronowych podgrup warkoczowych. Ponadto fraktalna struktura podpoziomów Landaua w przypadku motyla Hofstadtera jest efektem jednocząstkowym (pasmowym)⁹, podczas gdy warkoczowa współmierność jest kolektywnym fenomenem (oddziaływanie odgrywa tu podstawową rolę definiując wignerowski klasyczny rozkład elektronów na jellium uwarunkowany odpychaniem kulombowskim). Poza model Hofstadtera wykraczają również wielopętłowe warkocze i związana z tym współmierność wielopętłowych orbit cyklotronowych. Zatem odniesienie do motyla Hofstadtera jest raczej ilustracją skuteczności koncepcji współmierności, ale nie jest związane bezpośrednio z prezentowanym topologicznym modelem warkoczowym (np. przeliczalna struktura warkoczy wyklucza odniesienia do niewymiernych i nieprzeliczalnych fraktalnych uogólnień współmierności w przypadku motyla Hofstadtera [68]).

2.5 Symetria wielocząstkowych stanów kwantowych przewidzianych przez model warkoczowy, funkcje falowe i ich energia



Rysunek 4: Przykładowe warkocze [8] (w tym dla stanów *enigmatic*, zaznaczone kolorem na krzywej eksperymentalnej R_{xx} [33]), podobna głębokość lokalnych minimów R_{xx} też wyjaśniona została modelem warkoczowym [1, 8]

Unitarna reprezentacja (1DUR) podgrupy warkoczowej dopasowującej się specyficznie i zgodnie za współmiernością do zmieniającego się zapelnienia poziomu Landaua ν (czyli do zmienianego pola magnetycznego przy stałej liczbie N elektronów i stałej powierzchni układu S , i zmiany degeneracji LLS, $N_0 = \frac{BS_e}{h}$ kiedy współczynnik zapelnienia $\nu = \frac{N}{N_0}$) zależy od generatorów podgrupy wybieranych przez dopuszczalną dla danego ν współmierność odpowiednich wielopętłowych cyklotronowych warkoczy z uwzględnieniem też

⁹Dla współmierności Hofstadtera-Azbela [67, 68] rozpatrywano abstrakcyjną współmierność pola powierzchni płaskiej orbity cyklotronowej i komórki elementarnej kryształu 2D – obie charakterystyki są jednocząstkowe.

dalszych sąsiadów¹⁰ (czyli przez specyficzną konfigurację wielopętlowej współmierności). Generatory te i ich reprezentacje 1DURs, pozwalają następnie na odtworzenie symetrii wielomianowej części wielocząstkowej funkcji falowej (w przypadku koniecznego warunku holomorficzności tej funkcji w LLL [52], generatory podgrupy cyklotronowej jednoznacznie definiują tę funkcję, różną dla różnych zestawów generatorów – co zgadza się na rodzinie funkcji Laughlina i pozwala na oryginalne i kontrolowane jej uogólnienie). Otrzymana w ten sposób [2, 13, 15] postać funkcji falowych dla dowolnego wypełnienia z hierarchii (czyli wypełnienia dopuszczającego współmierność warkoczową) pozwala na obliczenie energii średniej w takim kolektywnym wielocząstkowym stanie kwantowym metodą Metropolis Monte-Carlo [69, 70]. Obliczenia tej energii wykonane przez autora [1, 2, 13, 15] dla różnych wypełnień z uzyskanej metodą warkoczową hierarchii i dla stosunkowo dużej liczby cząstek (do 600) bardzo dobrze zgadzają się z danymi z dokładnej diagonalizacji dla małych modeli oraz z danymi eksperymentalnymi odnośnie energii aktywacji obserwowanych kolektywnych stanów FQHE przy tych wypełnieniach (przykładowe porównanie energii aktywacji obliczonej dla topologicznie przewidzianych funkcji próbnych dla kilku ν z energiami aktywacji znalezionymi dokładną diagonalizacją dla tych ν na małych modelach przestawiono w Tabeli 1).

q	x	y	hierarchy fraction, $\nu = \frac{yx}{(q-1)y \pm x}$	energy from Monte Carlo simulation for functions given by braid model	energy from exact diagonalization
3	1	2	$\frac{2 \cdot 1}{(3-1) \cdot 2 + 1} = \frac{2}{5}$	-0.432677	-0,432804
3	1	3	$\frac{3 \cdot 1}{(3-1) \cdot 3 + 1} = \frac{3}{7}$	-0.441974	-0,442281
3	1	4	$\frac{4 \cdot 1}{(3-1) \cdot 4 + 1} = \frac{4}{9}$	-0.446474	-0,447442
3	1	5	$\frac{5 \cdot 1}{(3-1) \cdot 5 + 1} = \frac{5}{11}$	-0.451056	-0,450797
5	1	2	$\frac{2 \cdot 1}{(5-1) \cdot 2 + 1} = \frac{2}{9}$	-0.342379	-0,342742
5	1	3	$\frac{3 \cdot 1}{(5-1) \cdot 3 + 1} = \frac{3}{13}$	-0.348134	-0,348349
5	1	4	$\frac{4 \cdot 1}{(5-1) \cdot 4 + 1} = \frac{4}{17}$	-0.351857	-0,351189

Tabela 1: Porównanie energii kilku stanów FQHE w modelu warkoczowym z energią z dokładnej diagonalizacji (dla stanów warkoczowych symulacja Metropolis Monte-Carlo dla $N = 200$) [1, 8]

2.6 Wytłumaczenie stanów spoza tzw. hierarchii Jaina (*enigmatic*) i po raz pierwszy objaśnienie fenomenologicznego modelu CF i jego ograniczeń

Proponowana metoda topologiczna wydaje się być uniwersalna, może być stosowana w różnych materiałach, w LLL a także w wyższych LL (w wyższych LL obserwowana eksperymentalnie hierarchia FQHE nie powiela wzorca z LLL [42], ponieważ w wyższych LL współmierne orbity są często jednopętlowe [11] niespotykane w LLL).

Autor udowodnił, że tzw. hierarchia Jaina CF w LLL, $\nu = \frac{y}{(q-1)y \pm 1}$, gdzie $y = 1, 2, \dots$ i q nieparzyste [40], odpowiada warkoczowemu modelowi współmierności wielopętlowych orbit z najbliższymi sąsiadami, tj. ogólnej hierarchii warkoczowej [1, 8, 15], $\nu = \frac{yx}{(q-1)y \pm x}$, ale dla $x = 1$ (co odpowiada najbliższym tylko sąsiadom dla współmierności pierwszych $q - 1$ pętli q -pętlowej cyklotronowej trajektorii). Natomiast liczna również eksperymentalnie obserwowana [33, 71] hierarchia w LLL spoza hierarchii Jaina ($\nu = \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{4}{11}, \frac{5}{13}, \frac{7}{11}, \frac{6}{17}, \frac{4}{13}, \frac{5}{17}, \dots$, nazywana w literaturze *enigmatic hierarchy*) wynika w prosty sposób ze współmierności wielopętlowych orbit ale z dalszymi sąsiadami ($x > 1$), nie ujmowanymi przez konwencjonalny model CF (jak zilustrowano na Rys.

¹⁰Dla wielu ν nie jest dopuszczalna żadna współmierność, natomiast FQHE opisany możliwą współmiernością pojawia się tylko w dyskretnej 'magicznej' hierarchii wypełnień.

3). Proponowane są wprawdzie uogólnienia CF w kierunku kolejnych generacji CF budowanych z CF wcześniejszej generacji i heurystycznego założenia skokowo pojawiającego się resztkowego silnego oddziaływania CF wcześniejszej generacji. Anomalnie silniejsze od oddziaływania wyjściowych elektronów resztkowe oddziaływanie CF i pojawiające się od zera w wyniku najdrobniejszej nawet zmiany ν , by uzasadnić tworzenie kolejnej generacji CF [72], wydaje się jednak sztucznym założeniem – nieuzasadnione wydaje się zwłaszcza skokowe pojawianie oddziaływania, jeśli by traktować CFs jako kwazicząstki¹¹ [39, 40]. Natomiast przewidywania topologicznego modelu warkoczowego w kompletny i naturalny sposób zgadzają się tu z obserwacjami eksperymentalnymi także dla *enigmatycznych* stanów [1, 8, 15], a skokowe zmiany współmierności przy zmianie koncentracji elektronów na płaszczyźnie są zrozumiałym i koniecznym dyskretnym efektem (wynika stąd, że CF mogą być traktowane jako efektywny model wielopętlowych warkoczy, ale tylko dla współmierności z najbliższymi sąsiadami, tj. gdy $x = 1$ w powyższych formułach). Dobra zgodność energii funkcji próbnych w modelu CF z dokładnymi diagonalizacjami oraz z wynikami autora w modelu warkoczowym wiąże się z dopuszczeniem warkoczowym uzasadnieniem modelu CF w przypadku najbliższych sąsiadów ($x = 1$) i z pół-empiryczną metodą stosowaną dla CF wariacyjnego dopasowywania energii poprzez optymalny dobór tzw. rzutowania na LLL z wyższych LL dla uzyskania funkcji koniecznie holomorficzej w LLL z nieholomorficzej w wyższych LL. W metodzie Jaina poszukiwanie funkcji próbnych polega na rzutowaniu funkcji dla zapełnionych wyższych LL na LLL [40], co nie jest zdefiniowane jednoznacznie i w niekontrolowany sposób zwykle nie zachowuje symetrii w przeciwieństwie do matematycznie ścisłej postaci generatorów podgrup cyklotronowych definiujących te symetrie¹². Choć energia dopasowywana wariacyjnie przez optymalizację rzutowania na LLL może zbliżyć się do wartości z dokładnej diagonalizacji, to jednak proponowany stan ma zaburzone korelacje przez niekontrolowane rzutowanie, co potrafilismy zilustrować przez wizualizacje korelacji w analogii do tzw. wirtualnego kryształu Pauliego (czyli obrazowania korelacji) [13]. Metoda określania najbardziej prawdopodobnych konfiguracji 2, 3, 4, 5, ... elektronowych w układzie silnie skorelowanym [13, 15] bezpośrednio ilustruje różnice podejścia topologicznego i rzutowania na LLL zaburzającego wymaganą przez 1DUR warkoczy symetrię. Dodać można, że wizualizacja korelacji nazywana realizacją wirtualnego kryształu Pauliego odpowiada podobnej sytuacji jak szczegółowa równowaga termodynamiczna, gdzie różne korelacyjne rozkłady są ekwiwalentne, ale jednak są charakterystyczne dla danego typu korelacji (kryształ Pauliego może być nazywany co najwyżej wirtualnym kryształem, ale jest przydatny do obrazowania wielocząstkowych korelacji¹³, co zostało szerzej zilustrowane w pracy autora [13]).

2.7 Struktura jednopętlowych stanów FQHE w wyższych LL

Bardziej złożona sytuacja współmierności występuje w wyższych poziomach Landaua niż w LLL i dobrze tłumaczy to eksperymentalne obserwacje całkowicie odmiennej hierarchii FQHE w wyższych LL w stosunku do hierarchii w LLL (w GaAs [42] i w grafenie [30, 34]). Tylko w LLL jednopętlowe orbity cyklotronowe są zawsze zbyt krótkie w porównaniu z odległością elektronów, natomiast w wyższych LL tak nie jest. W wyższych LL, czyli w słabszym polu i dla większej energii kinetycznej, $(2n + 1)\frac{\hbar\omega_B}{2}$, dla $n > 0$, orbity cy-

¹¹Kwazicząstki definiowane jako bieguny jednocząstkowej retardowanej funkcji Greena (jak w przypadku kwazicząstek Landaua w metalu [73]) wymagają ciągłości operatora masowego względem argumentów, po przedłużeniu analitycznym częstości matsubarowskiej [73], co w przypadku układu Halla 2D nie jest spełnione. Operator masowy z oddziaływania elektronów 2D w polu magnetycznym nie jest ciągły względem momentu pędu, co prowadzi do 'kwantowania odległości' elektronów, jak nazwał to Laughlin [32].

¹²Wyższe LL pojawiające się w konstrukcji funkcji falowych CF wskazują niejawnie na korelacje dalszych sąsiadów, ale w metodzie CF tylko ostatnią pętlą cyklotronową (do której odnosi się y w wyżej wymienionych wzorach), przy pozostałych $q - 1$ pętlach zablokowanych jednak tylko na najbliższych sąsiadach warunkiem $x = 1$, co mocno ogranicza model.

¹³Określane jest wg funkcji falowej najbardziej prawdopodobne położenie n -tej cząstki przy wcześniej 'indukcyjnie' ustalonym położeniu $n - 1$ (aż do 1) cząstek w klastrze.

klotronowe i zbudowane z nich warkocze są (poza zapelnieniami blisko przy brzegach pasma) większe niż odległości między cząstkami. Topologiczny model rozwiązuje ten problem tutaj zbyt długich orbit cyklotronowych i budowanych z nich warkoczy poprzez współmierność także jednopętlowych orbit z dalszymi sąsiadami, co prowadzi do pełnej zgodności opisanej w ten sposób hierarchii FQHE w wyższych LL z eksperymentem we wszystkich obserwowanych tam doświadczalnie kolektywnych stanach. Model CF jest tu zupełnie niepasujący (bo ilustrował wyłącznie wielopętłowe trajektorie poprzez pomocnicze pole doczepianych kwantów strumienia do elektronów, jeden kwant, *flux* – jedna pętla i skracał orbity) i nie pozwala na opisanie współmierności warkoczy z dalszymi sąsiadami jednopętłowymi warkoczami poprzez 'doczepianie' *fluksów* – są tu niepotrzebne, bo właśnie jednopętłowe warkocze łączą dalszych sąsiadów w wyższych LL prowadząc do nowej klasy stanów FQHE. Ta nowa klasa stanów FQHE zaproponowana została oryginalnie przez autora [11] i została zidentyfikowana w wyższych LL zarówno w 2DEG GaAs jak i w grafenie [2,5,8] w pełnej zgodności z eksperymentem (jest to istotny nowy element przedstawianego osiągnięcia naukowego).

W wyniku zastosowania metody warkoczowej można uzyskać hierarchię jednopętlowych stanów FQHE w wyższych LL (niespotykanych w LLL i po raz pierwszy opisanych w pracy autora [11]) obok też wielopętlowych stanów FQHE w wyższych LLs ale spychanych tu ku brzegom pasma, coraz mocniej ze wzrostem numeru poziomu Landaua, n [6,7] (przy brzegach pasma jest mało elektronów [lub symetrycznie w pasmie dziur pasmowych], są one wtedy bardziej odległe i dla ich zamieniania, nawet przy długich cyklotronowych warkoczach dla $n > 0$, mogą być potrzebne wielopętłowe wydłużenia tych ostatnich – zostały one także szczegółowo opisane oryginalnie przez autora [7]).

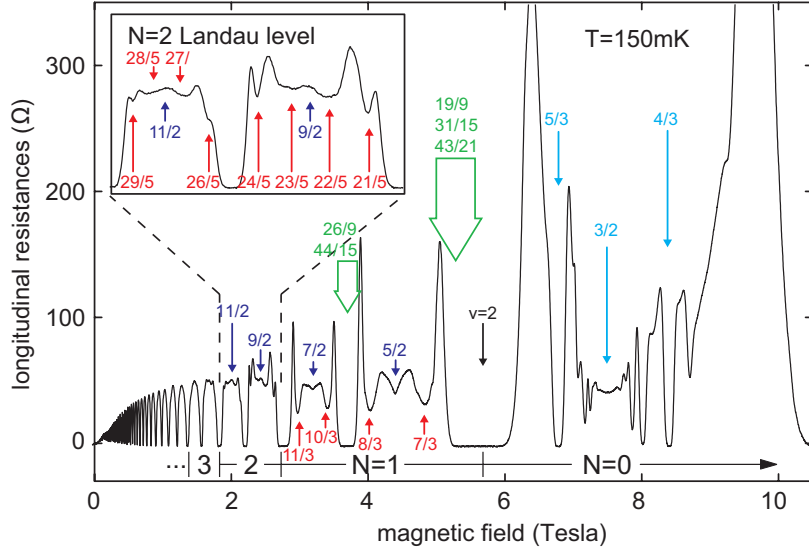
Zaproponowana przez autora [11] koncepcja wyjaśnienia serii stanów z mianownikami 3 (występujących dubletami, $\nu = \alpha + \frac{1}{3}, \alpha + \frac{2}{3}$, $\alpha = 3, 4$) dla podpasm z $n = 1$ i z mianownikami 5 (czwórki - symetryczne kompleksy czterech stanów, $\nu = \alpha + \frac{1}{5}, \alpha + \frac{2}{5}, \alpha + \frac{3}{5}, \alpha + \frac{4}{5}$, $\alpha = 5, 6$) dla podpasm z $n = 2$ (numeracja α przy uwzględnieniu spinu) w 2DEG GaAs [42] są nową propozycja stanu ułamkowego FQHE o strukturze współmierności z kolejnymi sąsiadami jednopętlowych warkoczy (takich jak dla IQHE ale przy ułamkowych zapelnieniach wyższych LL¹⁴, $R_{xy} = \frac{h}{e^2\nu}$ kwantuje się tu tak samo jak dla wielopętlowych stanów FQHE). Te dublety i czwórki widoczne są wyraźnie w eksperymencie, Rys. 5 (nie są to stany związane z CF), a ponadto centralnie w stosunku do tych kompleksów stanów położone są stany dla $\nu = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \dots$ (Rys. 5), które wg modelu warkoczowego są sparowane [7,11] (też zgodnie z obserwacjami i z symulacjami numerycznymi stanów sparowanych typu Pfaffian [56]), ale nie dla $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (w dwóch spinowych podpasmach LLL), gdzie model warkoczowy przewiduje metal Halla [6,7], także w zgodności z eksperymentem¹⁵ (tu w LLL w zgodności też z modelem CF).

Wraz z numerem n poziomu Landaua, ta struktura jednopętlowych kompleksów zapelnień rozrasta się (jak $2n$ symetrycznie ułożonych stanów FQHE wokół centralnie położonego sparowanego stanu¹⁶), jest przekonująco obserwowana w eksperymencie dla n do 2 [42] – Rys. 5. Dla wyższych n model warkoczowy przewiduje coraz mniejszą energię aktywacji, ponieważ coraz mniej elektronów uczestniczy w korelacjach w coraz wyższych stanach (reszta zajmuje całkowicie wypelnione niższe poziomy) i coraz mniejsza energia

¹⁴Za jednopętlowym charakterem tych stanów przemawia widoczna w eksperymencie ich stabilność (są tak samo stabilne jak również jednopętłowe stany IQHE) [34].

¹⁵Stany sparowane odpowiadają sytuacji kiedy zbyt krótkie odległości między cząstkami zwiększyć przez ich sparowanie, czyli efektywne zmniejszenie liczby cząstek dwukrotnie. Orbity cyklotronowe nie zmieniają się dla par, ponieważ $\hbar\omega_B = \frac{\hbar eB}{m} = \frac{\hbar 2eB}{2m}$, natomiast koncentracja par jest dwukrotnie mniejsza od koncentracji pojedynczych elektronów i dopasowanie orbit cyklotronowych par do separacji par daje $\nu = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \dots$. Jest też jasne, że w LLL w obu spinowych podpasmach orbity cyklotronowe są zawsze krótsze niż odległości między najbliższymi sąsiadami i wydłużanie tych odległości przez sparowanie pogorszyło by tylko sytuację i dlatego dla $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ obserwuje się metal Halla a nie stan sparowany.

¹⁶Nasz model wskazuje na spolaryzowaną wzdłuż pola komponentę trypletowego sparowania (jak w fazie d nadciężłego He³), co wydaje się zgadzać z numerycznym porównaniem z dokładną diagonalizacją Morfa [56].



Rysunek 5: Widoczne w eksperymencie [42] jedнопętlowe stany FQHE dla $n = 1$ i $n = 2$ (na rys. duże N) (w GaAs) – zaznaczone czerwonym kolorem; niebieskie $4/3$, $5/3$ to trójпętlowe FQHE w LLL, $n = 0$; $\nu = 5/2, 7/2, 9/2, 11/2$ to stany sparowane, ale $3/2$ to metal Halla; zielonym kolorem zaznaczono kilka stanów FQHE z wielopętlowych serii przesuniętych do brzegów pasma dla $n > 0$ i przesłoniętych przez IQHE-*reentrant* wokół całkowitych zapełnień [7, 11]

tych korelacji jest łatwo przesłaniania przez chaos termiczny (nawet w skali mK nie są widoczne stany FQHE dla $n > 2$ [42, 56]). Można tu dodać, że spychane do brzegów pasma stany wielopętlowe dla $n > 0$ [7] mogą z kolei być przesłanianie przez szerokie wypłaszczenia związane z IQHE-*reentrant*, szerokie właśnie w tej lokalizacji¹⁷, co zauważyć można na Rys. 5.

Model warkoczowy pozwala też na uogólnienie w kierunku zidentyfikowania pełnej hierarchii metalu Halla poprzez przejście do granicy nieskończonej z rozmiarem ostatniej pętli w wielopętlowej orbicie (np. granicy $y \rightarrow \infty$ w wyżej wymienionych formułach na warkoczową hierarchię w LLL). Metal Halla naturalnie pojawia się w dwóch pierwszych podpasmach spinowych LLL w ich środku, zgodnie tu też z CF, ale również w innych ułamkowych zapełnieniach, poza zasięgiem CF w LLL z innych rodzin hierarchii we wspomnianej granicy [6–8] – nie jest to dostrzegalne w modelu CF, ponieważ 'nie sięga' on do dalszych sąsiadów $q - 1$ pierwszymi pętlami i nie definiuje wszystkich rodzin hierarchii (dla $x > 1$). Metal Halla, zgodnie z modelem warkoczowym, nie pojawia się w środku pasm z $n > 0$, a równocześnie może pojawić się (nieoczekiwanie w modelu CF) dla zapełnień z mianownikiem nieparzystym (np. dla $x > 1$ hierarchia metalu Halla w LLL, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{xy}{(q-1)y \pm x} = \frac{x}{q-1}$, może mieć nieparzysty mianownik dla x parzystego, np. $x = 2$ i wtedy dzielnika $q - 1$, q jest zawsze nieparzyste). Została podana przez autora kompletna hierarchia metalu Halla w LLL i w wyższych poziomach Landaua [2, 5, 8, 11] (w GaAs i w grafenie).

W kolejnej pracy [10] zostało wskazane że koniecznym uwarunkowaniem dla realizacji korelacji FQHE jest dostatecznie długa średnia droga swobodna elektronów, większa niż rozmiar próbki, czyli dostatecznie wysoka ruchliwość (rzędu 10^6 cm²/Vs), co zgadza się z modelem warkoczowych trajektorii i uwarunkowanie to zostało potwierdzone eksperymentem w zawieszanej w powietrzu próbce grafenu (*suspended graphene*), która ze stanu izolatora przechodzi w stan FQHE po wyżarzeniu (przez krótki impuls stosunkowo wysokiego

¹⁷Stany *reentrant* to stany z efektywnym kwantowaniem R_{xy} i zerowaniem R_{xx} jak dla całkowitego ν ale dla pobliskiego niecałkowitego nominalnego ν (różnica w ułamku wypełnienia sięga nawet 20% w LLL i jest też znaczna w wyższych LL – Rys. 5). Zjawisko to tłumaczy się efektem paskowania (*striping*), kiedy z powodów korzyści energetycznej stan skorelowany z lokalnie całkowitym ν realizuje się nie na całej powierzchni układu a tylko na węższych paskach.

natężenia prądu przepuszczonego przez próbkę, co zwiększa ruchliwość poprzez usunięcie defektów w wyniku wyżarzenia¹⁸) [74]. Dostatecznie długa droga swobodna konieczna jest dla realizacji daleko sięgających warkoczy z grupy warkoczowej, co wymaga wysokiej ruchliwości nośników, dla których droga swobodna przekracza rozmiar próbki [10, 16].

Należy tu wyjaśnić, że warkocze cyklotronowe, podobnie jak grupa homotopii 2D, to klasyczne pojęcia i nie odnoszą się bezpośrednio do kwantowego zachowania cząstek nieposiadających przeciw trajektorii. Model topologiczny idealnie 2D danej homotopii może natomiast być wykluczony przez układ kwantowy, jak w przypadku zbyt silnego pola magnetycznego dla jednopętlowych trajektorii (wcale kwantowo nie realizowanych orbit cyklotronowych, poza kwaziklasyczną kinetyką pakietów falowych), czy zbyt małej drogi swobodnej wykluczającej adekwatność zbyt długich wielokrotnych warkoczy (a krótszych od rozmiaru układu). Nie przeszkadza jednak np. niemożność realizacji w danym skończonym układzie dowolnie długiego warkocza, o ile tylko jest on dłuższy niż rozmiar układu – taki nie mógłby być nigdy zrealizowany w tym układzie i dlatego nie może być też wykluczony przez ten skończony kwantowy układ. Podobny charakter należy dostrzec w stosowalności (lub niestosowalności) ściśle 2D klasycznego topologicznego modelu homotopii do realnego płaskiego ale w istocie 3D układu kwantowego – znowu nie ważne czy prawdziwy układ kwantowy jest skończonej grubości, a ważne jest by nie przejawiał 3D dynamiki, co przekłada się na znacznie większe odległości energetyczne kinetyki nośnika w kierunku z w porównaniu do x, y .

Z modelem warkoczowym zgadza się też obserwowana stała stabilność FQHE w grafenie przy zmniejszaniu oddziaływania przez zmniejszanie koncentracji elektronów i równoczesne zmniejszenie pola magnetycznego tak, że ułamek zapelnienia ν jest zachowany [2, 6, 34], wtedy dłuższe cyklotronowe warkocze w słabszym polu wciąż są współmierne z rozkładem rozrzedzonych elektronów (w grafenie, w odróżnieniu od 2DEG GaAs można zmieniać koncentrację nośników przez przesuwanie bocznym napięciem poziomem Fermiego w pobliżu punktu Diraca). W modelu CF osłabienie oddziaływania w wyniku rozsunęcia elektronów powinno zmniejszyć stabilność fazy FQHE, czego się jednak nie obserwuje (w grafenie na tzw. *fan diagrams* [34]). Proponujemy tu dodatkowy ilustrujący eksperyment z warstwą Halla w otoczeniu dielektryka (gazowego, ciekłego lub stałego) modyfikującego (zwiększającego) względną przenikalność w warstwie i sprawdzenie wpływu osłabienia w ten sposób oddziaływania elektronów na stabilność FQHE (w GaAs, a zwłaszcza w grafenie, gdzie są dostępne domieszkowane podłoża z wyjątkowo wysoką względną przenikalnością dielektryczną i współmierną heksagonalną strukturą [75]). Inną możliwą weryfikacją eksperymentalną jest propozycja [16] doświadczalnego sprawdzenia współmierności cyklotronowej przy mijaniu zapelnienia $\nu = 1/2$, gdzie model warkoczowy przewiduje reorientację na przeciwną ostatniej pętli (struktura ósemki [16]), w rozwoju wcześniej wykonanego eksperymentu potwierdzenia cyklotronowej balistyki dla FQHE.

2.8 Zastosowanie modelu warkoczowego do grafenu jednowarstwowego

Użyteczność modelu warkoczy i współmierności w szeroki sposób uwidacznia się w interpretacji nowych obserwacji eksperymentalnych [34] w wyższych poziomach grafenu jednowarstwowego z podpasem z $n = 1$ (do szóstego podpasma, uwzględniając spinowo-dolinową SU(4) degenerację w grafenie jednowarstwowym) i całkowicie niejasnych wcześniej i kontrowersyjnych obserwacji w grafenie dwuwarstwowym, aż w ośmiu kolejnych podpasmach [30, 35, 48]. W grafenie należy uwzględnić odmienną strukturę poziomów Landaua, tzw. pseudo-relatywistyczną wynikającą ze specyficznej struktury pasmowej grafenu przejawiającej się istnieniem stożków Diraca w wierzchołkach sześciokątnej strefy Brillouina w dwóch nieekwiwalentnych pozycjach [76]. Struktura SU(4) degeneracji spinowo-dolinowej podpasem w grafenie jednowarstwowym i różnych schema-

¹⁸Wyżarzanie nie zmienia oddziaływania elektronów i nie powinna zmieniać stabilności stanu FQHE w modelu CF, a jednak zmienia tę stabilność [74].

tów jej zdejmowania dobrze modeluje obserwowany w grafenie anomalny pseudo-relatywistyczny całkowity kwantowy efekt Halla (IQHE) [76] i pozwala też na rozwinięcie opisu warkoczy cyklotronowych w tym materiale w odniesieniu do FQHE. Grupy warkoczowe odzwierciedlają topologię trajektorii a nie ich szczegóły dynamiczne¹⁹, dlatego o klasach homotopii trajektorii cyklotronowych w grafenie decyduje goła energia kinetyczna (nieubrana w pole krystaliczne), taka sama jak w konwencjonalnym GaAs i taka sama masowa degeneracja w każdym podpaśmie. Wyjaśnia to niezrozumiały fakt obserwacji tej samej hierarchii FQHE w grafenie jednowarstwowym w LLL co i w GaAs mimo pseudo-relatywistycznych odmiennych poziomów Landaua wywołanych strukturą pasmową grafenu²⁰. Struktura hierarchii wypełnień FQHE w grafenie jest modyfikowana kolejnością podpasz spinowo-dolinowych (czterech w każdym poziomie Landaua, podczas gdy w przypadku 2DEG GaAs tylko dwóch spinowych) i lustrzaną symetrią pasm walencyjnego i przewodnictwa względem punktów Diraca. Równocześnie – co najważniejsze – taka sama degeneracja poziomów Landaua jest zachowana w każdym podpaśmie (i taka sama jak w GaAs). Zgodność modelu warkoczowego z eksperymentem jest tu przekonująca [34] – odtworzone zostały jeden-do-jeden wszystkie obserwowane w tym eksperymencie szczegóły hierarchii FQHE dla $n = 1$ [2, 5, 6, 8, 9] – Rys. 6.

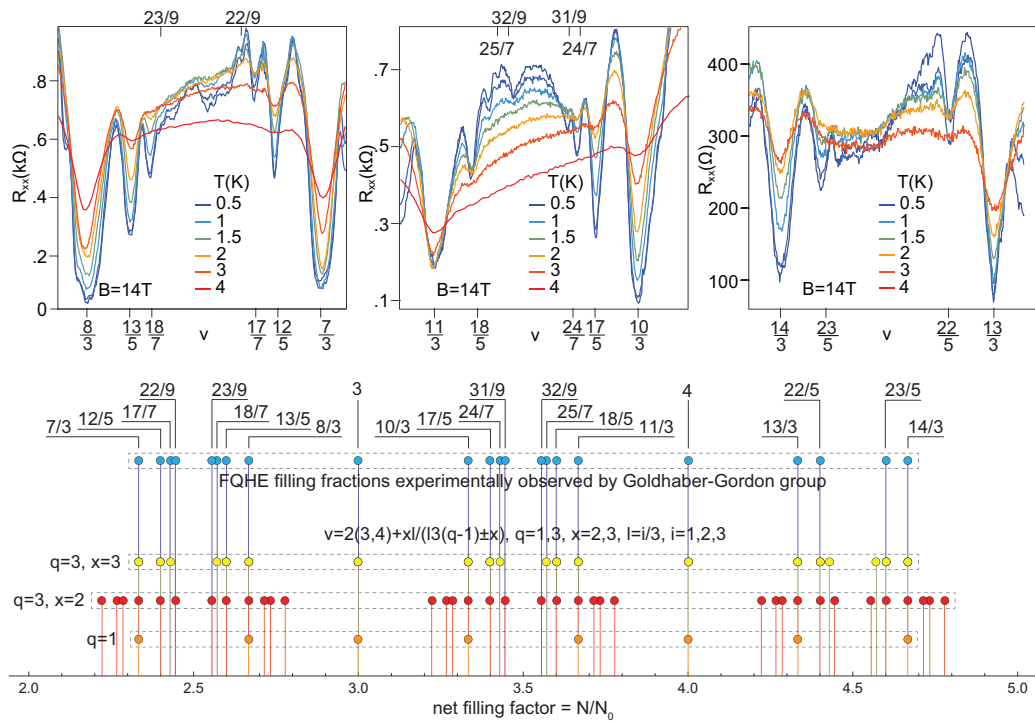
Ciekawym fenomenem jest brak eksperymentalnej obserwacji (jak do tej pory) serii spoza głównej hierarchii CF, czyli stanów FQHE dla $\nu = \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{4}{11}, \frac{5}{13}, \frac{5}{17}, \frac{6}{17}, \frac{7}{11}, \frac{4}{13}, \dots$ w grafenie jednowarstwowym w LLL (być może należy obniżyć temperaturę, by pokonać chaos przesłaniający te stany w LLL w jednowarstwowym grafenie), natomiast wyraźnie przejawia się tego typu seria w następnej czwórce podpasz kolejnego poziomu Landaua z $n = 1$ (dla $T \simeq 50$ mK) [2, 6, 7, 34] (w grafenie lepiej widać w eksperymencie [30, 34] stany Halla w wyższych podpaszach niż w GaAs z powodu większej energii aktywacji ze względu na zmodyfikowane stany jednocząstkowe w grafenie w wyższych LL [30]). W podpaszach z $n = 1$ w grafenie jednowarstwowym widoczne są dublety z mianownikami 3 [34, 78] – nie są to najprostsze CFs, jak by można podejrzewać z wartości mianownika, ale są to jednopętlowe stany FQHE (zidentyfikowane wcześniej dla $n = 1$ w GaAs [11]) ze współmiernością z bliższymi i dalszymi sąsiadami w każdej parze. Intensywność manifestacji korelacji maleje ze spadkiem liczby elektronów w niej uczestniczących wraz ze wzrostem numeru podpasza i , w związku z tym, coraz mniejszej wartości energii aktywacji danej fazy homotopii, co też jest widoczne w eksperymencie w grafenie jednowarstwowym (dla $n = 1$ są tu 4 podpasza i w czwartym sygnał już jest bardzo mały) [34], co zgadza się z modelem warkoczowym [2, 6]. Jednopętłowy FQHE wydaje się dla $n = 1$ potwierdzony też silną (taką jak dla IQHE) stabilnością jednopętłowych stanów w grafenie jednowarstwowym [2, 6, 34].

2.9 Wyjaśnienie anomalnego FQHE w grafenie dwuwarstwowym

Najistotniejszym powodzeniem zastosowania modelu cyklotronowych warkoczy jest wyjaśnienie mocno kontrowersyjnych (wyraźnie innych niż w *monolayer-graphene* i zupełnie niepasujących do modelu CF) obserwowanych stanów skorelowanych w grafenie dwuwarstwowym (*bilayer-graphene*) (ponad 30 różnych stanów [30, 35]). Przyczyną odmiennej specyfiki nawet w przypadku LLL grafenu dwuwarstwowego jest nieidealna płaskość układu – elektrony mogą tu przeskakiwać (tunelować) między dwoma warstwami, co silnie modyfikuje homotopie trajektorii i co daje się precyzyjnie ująć w modelu cyklotronowych warkoczy w bardzo dobrej zgodności z eksperymentem. Przeskok międzywarstwowy (tunelowanie) elektronów powoduje 'zaokrąglenie' stożków Diraca (widmo pasmowe w pobliżu punktów Diraca w grafenie dwuwarstwowym staje się ponownie paraboliczne, a widmo Landaua $\sim \sqrt{n(n-1)}$ [77], a w grafenie jednowarstwowym widmo

¹⁹O ile te szczegóły dynamiczne nie modyfikują homotopii – pole magnetyczne prostopadle do płaszczyzny nie łamie symetrii cylindrycznej, nie preferuje dynamiki w żadnym kierunku, i dlatego może modyfikować homotopie i topologię zmieniając powierzchnię orbit cyklotronowych, ale już elektrycznego typu pole krystaliczne jak w grafenie, nie modyfikuje topologii trajektorii.

²⁰W konwencjonalnym 2DEG GaAs energia poziomów Landaua rośnie z indeksem n jak $\hbar\omega_B(n+1/2)$ (czyli jak w gazie 2DEG), ale w grafenie jednowarstwowym jak $\hbar\omega'\sqrt{n}$, $\omega' = 2v_F/l_B$ [76], a dwuwarstwowym grafenie jak $\hbar\omega_B\sqrt{n(n-1)}$ [77].

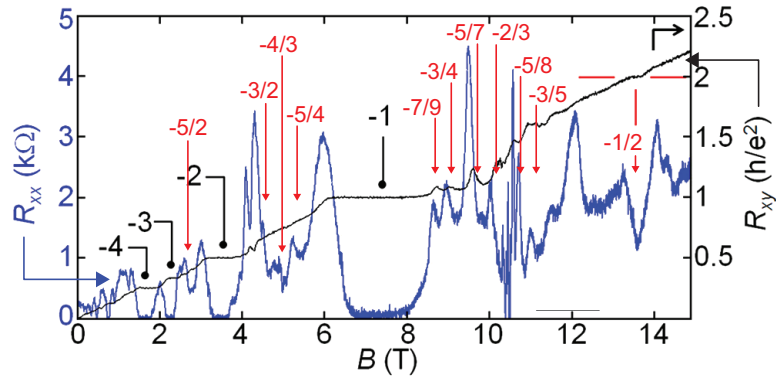


Rysunek 6: Odtworzenie 1-1 hierarchią warkoczną stanów FQHE zaobserwowanych [34] w grafenie jednowarstwowym dla $n = 1$ [2, 6]

pasmowe było lokalnie liniowe [pseudo-relatywistyczne] z widmem Landaua $\sim \sqrt{n}$ [76], n – numer stanu oscylatorowego Landaua). Z punktu widzenia homotopii trajektorii możliwość przeskoku powoduje ewentualność (a homotopie właśnie 'wyłapują' ewentualności na tle innych dopuszczalnych sytuacji i to oznacza zmianę topologii) ucieczki jednej lub więcej pętli trajektorii z jednej warstwy do drugiej. Gdy mamy do czynienia np. z trójpętlową trajektorią, to ucieczka trajektorii realizuje rozkład pętli między warstwami, 2 – 1 lub (ekwiwalentnie) 1 – 2 – w obu przypadkach tylko 2 pętli (a nie wszystkie 3 jak w monowarstwie) dzielą między siebie wspólny strumień pola zewnętrznego, ponieważ ta trzecia pętla, która przeskoczyła do przeciwległej warstwy, ma swoją własną tam powierzchnię. Powoduje to, że FQHE dla $\nu = 1/3$, który był obserwowany w grafenie jednowarstwowym, w grafenie dwuwarstwowym przesuwa się do $\nu = 1/2$ (tam gdzie w jednowarstwowym był metal Halla) i to zostało zaobserwowane w eksperymencie [35]. Efekt ten jest nieosiągalny w modelu CF (wymaga bowiem opisanej manipulacji pętlami niemożliwymi do ujęcia w modelu CF, a ewentualne proponowane rozdzielanie doczepianych *fluksów* między warstwami jest niespójne z koncepcją kwazicząstki CF [40]).

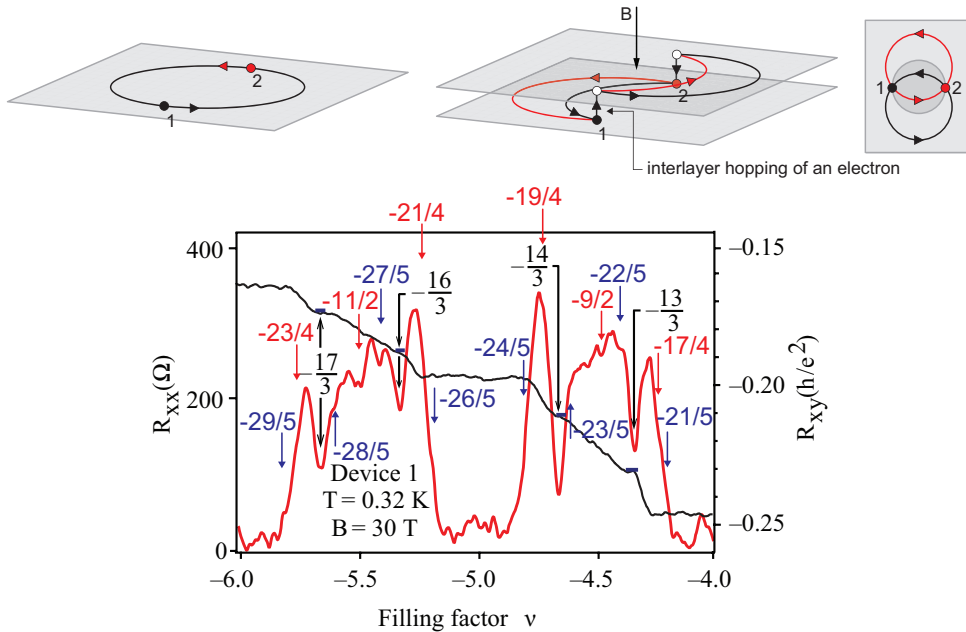
Interesujące, że w innym eksperymencie [48] gdy dwuwarstwowy grafen jest ulokowany na podłożu hBN (heksagonalny azotek boru współmierny ze strukturą krystaliczną grafenu), a nie podwieszony w powietrzu w postaci swobodnej dwuwarstwy (*suspended graphene*) jak w [35], to stan FQHE w 1/2 znika – i tu także skuteczne wyjaśnienie oferuje model cyklotronowych warkoczy: W dwuwarstwowym grafenie mamy dodatkową tzw. 'przypadkową' degenerację stanów $n = 0$ i $n = 1$ (stany oscylatora harmonicznego dla poziomów Landaua) obu wchodzących zatem w grafenie dwuwarstwowym do LLL (stany oscylatora $n = 0$ i $n = 1$ mają tu tę samą energię, co wynika z obecności podwójnego operatora anihilacji w lokalnym hamiltonianie dla *bilayer-graphane* związanym z przeskokiem między warstwami [77]), daje to tu aż 8-krotną degenerację LLL, 4-krotną spinowo-dolinową i zdwojoną przez 'przypadkową' degenerację $n = 0$ i $n = 1$ (w jednowarstwowym była tylko 4-krotna degeneracja LLL)²¹. Jeśli zauważyć, że dla $n = 1$ orbity

²¹LLL jest symetrycznie podzielony między pasma walencyjne i przewodnictwa w grafenie, a bocznym napięciem przesuwac



Rysunek 7: Stany FQHE obserwowane [35] w *suspended bilayer-graphene*, w tym $\nu = -1/2$, spowodowane ucieczką pętli cyklotronowej do przeciwnej warstwy (kolorem czerwonym zaznaczona cała związana z przeskokiem pętli hierarchia warkoczowa wyraźnie zgodna z eksperymentem [2])

cyklotronowe są 3 razy większe niż dla $n = 0$ (przy tym samym polu B), to w przypadku, gdy poziom $n = 1$ (tj. odpowiednie podpasmo LLL w *bilayer-graphene* z $n = 1$) jest wypełniany pierwszy przed $n = 0$, to trójpętlowa trajektoria nie będzie w ogóle potrzebna w takim najniższym podpaśmie z dużymi orbitami i nie będzie przeskoku orbity dającego FQHE dla $\nu = 1/2$ (który był obecny w przypadku gdy stan z $n = 0$ [podpasmo LLL z $n = 0$] był pierwszy wypełniany i orbity trzeba było wydłużać dodatkowymi pętlami) – wyjaśnia to obserwowaną różnicę między obydwoma konfiguracjami eksperymentalnymi [2, 9, 14]. Oprócz stanu $\nu = 1/2$ model warkoczowy przewidział całą serię wypełnień w LLL w *bilayer-graphene* – jak na Rys. 8 (dla $n = 0, 1$ kolejności wypełnień).

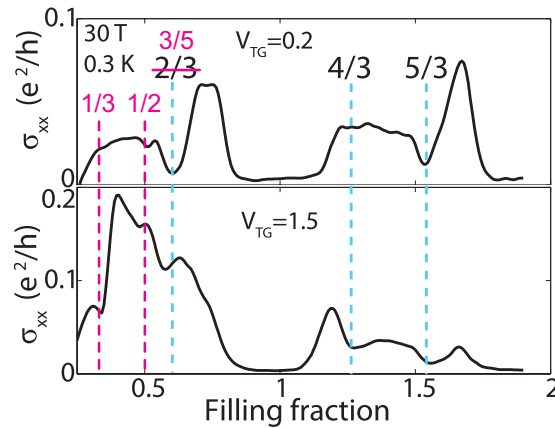


Rysunek 8: Ilustracja wpływu fragmentu pętli orbity do przeciwnej warstwy [2] i odtworzenie tym efektem obserwowanych [30] wypełnień FQHE w *bilayer-graphene* dla $n = 2$, dwa pierwsze podpasma

Dalszą topologiczną nowością w grafenie dwuwarstwowym jest możliwość przeskoku fragmentu pętli, tj. realizowanie indywidualnej pętli z przeskokiem [2, 8], Rys. 7 – wtedy nie ma wymogu współmierności można poziom Fermiego między pasmowymi elektronami i dziurami (co daje istotną przewagę eksperymentalną grafenu nad konwencjonalnym elektronowym 2DEG GaAs).

w pojedynczej warstwie dla takiej częściowo przeskakującej pętli (ponieważ zamieniające się warkoczem elektrony są cały czas w przeciwnych warstwach) i obserwować można w takiej sytuacji inny wymiar pętli niż nominalny dla danego n bez przeskoku (jak na Rys. 7). Opisać to można przez efektywną ucieczkę strumienia pola przechodzącego przez zredukowaną pętlę, kwant po kwancie – pełna analiza takich możliwości daje dopasowanie równocześnie wszystkich około 30 zaobserwowanych stanów w LL z $n = 2$ w *bilayer-graphene*, gdzie ta ucieczka kwantów na skutek przeskoku części pętli do przeciwnej warstwy jest wyjątkowo istotna [2] (Rys. 8). Tu zgodność jeden-do-jeden z eksperymentem wydaje się mocno potwierdzać topologiczny warkoczowy model korelacji FQHE (było to dyskutowane przez autora z zespołem eksperymentalnym prof. D. Goldhabera-Gordona [30], przy okazji recenzowania przez autora publikacji zespołu Goldhabera-Gordona [30] – dyskusja ta jest tam też opublikowana). Proponujemy tu też dalszy krok eksperymentalny – dla trójwarstwowego grafenu, również z odmienną jeszcze inaczej topologią trajektorii i strukturą jej przeskoków i możliwą do przewidzenia specyficzną strukturą stanów skorelowanych.

2.10 Eksperymentalna weryfikacja modelu warkoczowego w grafenie dwuwarstwowym, rozstrzygający eksperyment



Rysunek 9: Pionowym napięciem, które blokuje przeskok trajektorii między warstwami, można zmienić homotopię trajektorii grafenu dwuwarstwowego na homotopię jednowarstwowego [2, 8] – eksperyment [79], stan $1/3$ zastępuje stan $1/2$

Interesujące jest, że przewidziany przez autora eksperyment z zablokowaniem przeskoku przez pionowe napięcie prostopadle przyłożone do hallowskiej dwuwarstwy *bilayer-graphene* (dwuwarstwowego grafenu) został wykonany wcześniej z innym zamiarem [79], ale potwierdził przewidywania opisanego modelu warkoczowego. Poprzez częściowe (w jedną stronę) zablokowanie przeskoku elektronu pionowym napięciem blokuje się możliwość międzywarstwowego przeskoku trajektorii. Przeskok trajektorii wymaga przeskoku elektronu w obie strony (trajektoria musi wrócić ponieważ jest zamknięta), zatem gdy odpowiednie elektryczne pole pionowe blokuje przeskok w jedną stronę, całkowicie blokuje przeskok trajektorii. W ten sposób przyłożonym napięciem przywrócić można topologię jednowarstwową z dwuwarstwową i wszystkie efekty homotopijne wywołane przeskokiem w dwuwarstwie znikają. To właśnie zaobserwowano w LLL dwuwarstwowego grafenu pod wpływem pionowego napięcia [79] (Rys. 9). Takie eksperymentalne zademonstrowanie zmiany topologii dwuwarstwowego grafenu przez przyłożenie pionowego pola elektrycznego – wydaje się to dość unikalną sytuacją w zakresie skorelowanych układów wielocząstkowych. Autor proponuje też dalszy rozwój tego eksperymentu [2, 8] (poprzez kontakt z grupami Mahera, Deana i Goldhabera-Gordona) dla tzw. próbek 'open face' (z wyciętym okienkiem w górnym hBN dla próbek zanurzonych [*embedded*] w hBN), na których uzyskano najbardziej zaawansowane wyniki odnośnie obserwacji FQHE [30] (aż do ósmego podpasma – co jest

rekordem w całej hallowskiej fizyce w wyniku przewag tej konfiguracji [30]). Te złożone obserwacje dały się wytłumaczyć modelem warkoczowym z przeskokiem pętli warkoczowej. Zablokowanie tego przeskoku powinno wyjątkowo silnie zmienić obserwowany obraz. Struktura próbki 'open face' utrudnia w pewnym stopniu nałożenie górnej elektrody zadającej pionowe napięcie blokujące przeskok, jest to problem techniczny, który dyskutujemy (można np. nałożyć elektrodę krawędziowo, gdyż jednorodność pola elektrycznego nie jest tu wymagana). Spodziewamy się, że wszystkie widoczne szczegóły związane z ucieczką kwantów strumienia znikną po przyłożeniu napięcia, a zastąpione one zostaną zupełnie inną strukturą hierarchii (taką jaka jest obserwowana i przewidziana modelem warkoczowym w jednowarstwowym układzie hallowskim dla poziomu Landaua z $n = 2$ [5, 11], tj. zapelnienia z mianownikami 5).

2.11 Uogólnienie reguły Bohra-Sommerfelda – matematycznie ścisła weryfikacja modelu warkoczowego

Kolejnym naszym rezultatem [1] (wydaje się o bardziej podstawowym znaczeniu wykraczającym poza układy hallowskie) jest uogólnienie kwaziklasycznej reguły Bohra-Sommerfelda na przypadek niejednostopnej przestrzeni. Reguła Bohra-Sommerfelda odnosi się kwaziklasycznie do przypadku 1D i klasycznej przestrzeni fazowej (trajektorii fazowej) cząstki w dowolnego kształtu studni 1D z punktami zawracania na granicach studni²². Gdy jednak zastosować tę regułę do pary składowych kinematycznego pędu naładowanej cząstki (elektronu) 2D w prostopadłym polu magnetycznym B , kiedy te składowe pędu kinematycznego nie komutują ze sobą z powodu obecności prostopadłego pola magnetycznego (np. w cechowaniu Landaua, $A = (0, Bx, 0)$), te składowe, $\hat{P}_x = -i\hbar\nabla_x$, $\hat{P}_y = -i\hbar\nabla_y - eBx$, tworzą parę kanonicznie sprzężonych wielkości, które mogą być potraktowane jako uogólnione położenie i pęd – ich 1D przestrzeń fazowa w terminach pędu kinematycznego jest 2D i odpowiada obróconej o $\pi/2$ przestrzeni rzeczywistych przesunięć też w 2D, z kwaziklasycznego wzoru Lorentza na przyrost pędu kinematycznego, $d\mathbf{P} = -e d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$. Ta ostatnia przestrzeń może już być niejednostopna i rzeczywiście taką jest w układach wielu cząstek na płaszczyźnie – dopuszczalne (a czasem konieczne) są tu zatem wielopętłowe trajektorie niehomotopijne z jednopętlową. Trójpętłowa trajektoria typu Bohra-Sommerfelda (dla jednego powrotu – półpętla z jedną dodatkową pętlą – czyli w obie strony w przestrzeni fazowej, to razem 3 pętla) realizuje FQHE z $\nu = 1/3$, podczas gdy półpętla powrotu bez dodatkowej pętli realizuje IQHE z $\nu = 1$ [1]. Pętla na pojedynczym przebiegu między punktami zawracania mogą pojawiać się po jednej $k = 1, 2, \dots$, zatem na zamkniętym cyklu może być łącznie $2k + 1$ pętli (1, 3, 5, ...).

Całka Bohra-Sommerfelda dla składowych pędu kinematycznego na płaszczyźnie w obecności pola magnetycznego definiuje rozmiar kwantu strumienia tego magnetycznego – jest on $2k + 1$ razy większy dla k pętli na pojedynczej gałęzi zawracania (ma zatem większą powierzchnię przy tym samym polu magnetycznym – jest to rozmiar orbity cyklotronowej). To skrótowo zarysowane tu wyprowadzenie w sposób ścisły dowodzi wzrostu rozmiaru wielopętłowych trajektorii w 2D, co wykorzystujemy w analizie współmierności, kiedy warkocze cyklotronowe bez pętli są za krótkie.

To właśnie zmiana wielkości kwantu strumienia w niejednostopnej przestrzeni konfiguracyjnej dla elektronów 2D w polu magnetycznym jest przyczyną FQHE. Uogólnienie reguły Bohra-Sommerfelda [1] ma podstawowe ogólniejsze znaczenie nie tylko dla formalizmu warkoczowego, a wszędzie tam gdzie istotną rolę odgrywa kwant strumienia pola magnetycznego rosnący wraz z indeksem homotopii trajektorii (gdyby silne pole magnetyczne nie niszczyło nadprzewodnictwa, to można by się było spodziewać 'ułamkowego' efektu Josephsona dla odmiennego kwantu strumienia pary Coopera $(2k + 1)\frac{h}{2e}$; być może ułamkowe kwantowanie

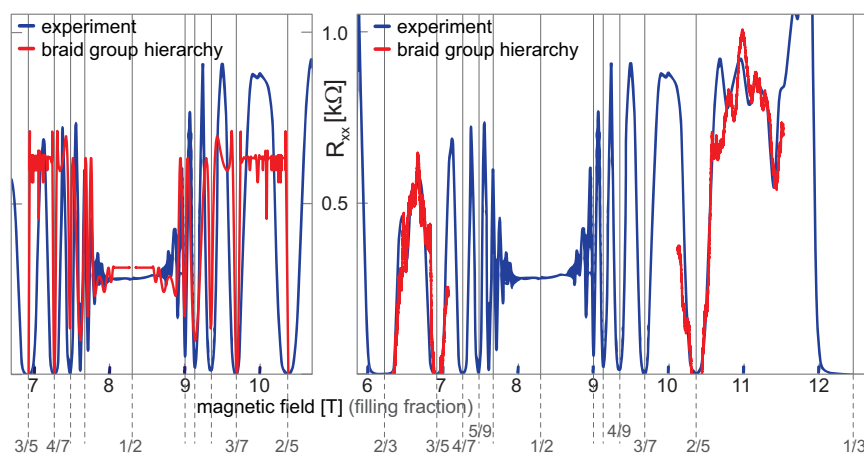
²²Wnikanie w barierę w przypadku niepionowej bariery powoduje pojawienie się w standardowej formule Bohra-Sommerfelda, $\oint p dx = (n + \frac{1}{2})h$; przesunięcie $1/2$ jest bez znaczenia dla topologii zagadnienia (dla pionowych nieskończonych barier $1/2$ znika).

niemagnetycznym polem Berry okaże się tu pomocne).

Podkreślić należy, że reguła Bohra Sommerfelda i zastosowanie do kwantowania strumienia pola jest kwaziklasyczne i niezależne od oddziaływania, tzn. przybliżenie kwaziklasyczne jest nieperturbacyjne względem oddziaływania (także topologiczne uogólnienie tej reguły jest niezależne od oddziaływania) – zatem reguła Bohra-Sommerfelda wraz z uogólnieniami topologicznymi może być stosowana w układach z dowolnie silnym oddziaływaniem (jak dla FQHE).

2.12 Całka Feynmana dla stanu kinetycznego i odtworzenie przebiegu R_{xx} w zależności od zapełnienia w LLL

Kolejnym rezultatem w przedstawianym osiągnięciu naukowym jest oryginalne rozwinięcie całki Feynmana [65, 66] na sytuację niestacjonarnego kinetycznego efektu kwantowego [1], kiedy propagator wyrażony przez tę całkę musi uwzględnić sumowanie po wszystkich możliwych trajektoriach odpowiadających różnym dopuszczalnym konfiguracjom współmierności (z różną energią) przy tym samym ν (zauważyliśmy, że liczba różnych faz homotopii dla tego samego ν silnie zależy od ν). Różnym konfiguracjom przy tym samym zapełnieniu ν odpowiada odmienna podgrupa cyklotronowa, co prowadzi do różnych energii stanów korelacji (faz homotopii), a najniższa z nich realizuje stan podstawowy. Interesujące jest tu zauważenie, że dla niektórych ν liczba możliwych różnych konfiguracji (faz homotopii) bywa mocno większa niż dla innych – dostrzegliśmy konsekwencję tego nierównomiernego rozkładu. Kiedy eksperyment jest kinetyczny (np. pomiar R_{xx}), to odpowiadający niestacjonarny kwantowy stan układu powinien być charakteryzowany przez całkę Feynmana z sumą po wszystkich dopuszczalnych konfiguracjach współmierności (ponieważ energia nie jest określona w stanie niestacjonarnym i dla zagadnienia kinetycznego z zależnym od czasu hamiltonianem nie istnieją stany stacjonarne). Taka suma nie występuje dla działania propagatora na stan stacjonarny z określoną energią (tam wchodzi tylko jedna konfiguracja). Uwzględniając wszystkie konfiguracje współmierności wykonaliśmy numeryczną symulację względnej wartości całki Feynmana wraz ze zmieniającym się ν w stanach niestacjonarnych, czyli bez określonej energii, ale z R_{xx} proporcjonalnym do odwrotności propagatora – wynik okazał się zaskakujący – odtworzyliśmy kształt eksperymentalnej krzywej $R_{xx}(\nu)$ dla GaAs [1], Rys. 4. To zupełnie nowy wynik w fizyce hallowskiej, silnie związany z modelem warkoczowym i wyraźnie go potwierdzający.



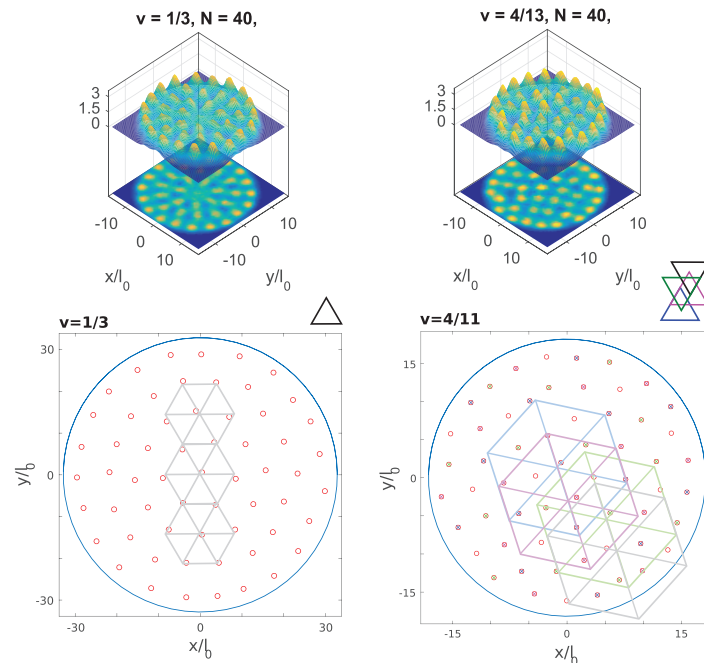
Rysunek 10: Odtworzenie $R_{xx}(\nu)$ w LLL (GaAs) przy pomocy całki Feynmana dla niestacjonarnego stanu [1], krzywa teoretyczna – czerwony, eksperymentalna – niebieski

Zauważamy też, że na krzywej $R_{xx}(\nu)$ dla stanów *enigmatic*, czyli dla takich ν , dla których niedopuszczalne są korelacje warkoczowe z $x = 1$, R_{xx} nie osiąga zera, w odróżnieniu od stanów z korelacjami z $x = 1$ (można zauważyć związek lokalnej głębokości minimów R_{xx} z wartością x) [1, 33]. Oznacza to, że dla tych

ν jest wyraźnie mniej różnych dostępnych klas homotopii niż dla ν dopuszczających $x = 1$. Pamiętając, że $x > 1$ oznacza korelacje następnych sąsiadów dla $q - 1$ pierwszych pętli q -pętlowej trajektorii (ostatnia pętla regulowana jest przez $y \geq x$ w ogólnej hierarchii) można interpretować, że całkowity brak korelacji najbliższych sąsiadów prowadzi tu do resztkowego oporu.

2.13 Kwantowe symulacje Monte-Carlo, nowatorska wizualizacja i identyfikacja korelacji i symetrii stanów FQHE

W ramach osiągnięcia naukowego prezentowane są także nasze kwantowe symulacje Monte-Carlo w metodzie Metropolis [69, 70] rozwinięte dla próbnych wielocząstkowych stanów odpowiadających generatorom poszczególnych podgrup warkoczowych, które definiują symetrie i postaci funkcji falowych (przy warunku ich holomorficzości w LLL), a wynikające ze specyficznej warkoczowej współmierności orbit cyklotronowych. Uzyskane energie średnie bardzo dobrze zgadzają się z dokładną diagonalizacją oddziaływania na małych modelach i z energiami aktywacji otrzymywanymi dla tych współczynników zapelnienia eksperymentalnie z zależności temperaturowej oporności (narysowanej w skali Arrheniusa).



Rysunek 11: Przykładowy portret korelacji (kryształ Pauliego) dla $\nu = 1/3$ i $\nu = 4/11$ (*enigmatic*) obliczony rozwiniętą metodą typu Metropolis Monte-Carlo z falowych funkcji warkoczowych [13] – zauważalne korelacje dalszych sąsiadów dla $\nu = 4/11$

W osiągnięciu przedstawione są analizy numeryczne autora (z doktorantką p. mgr inż. Patrycją Łydźbą, której autor jest pomocniczym promotorem) dla stanów skorelowanych dla różnych zapleń hierarchii FQHE otrzymanych w podejściu cyklotronowych grup warkoczowych dla zmiennej liczby cząstek przy tej samej gęstości (do około 10^3 cząstek w geometrii plakietki o symetrii cylindrycznej, i przedłużonej do granicy termodynamicznej podobnie jak w [69]). Wykazano bardzo dobrą zgodność z dokładną diagonalizacją oddziaływania na małych modelach dla rozpatrywanych zapleń i z eksperymentalnymi wartościami energii aktywacji. Rozwinięto też numeryczną analizę i wizualizację korelacji w rozpatrywanych stanach wielocząstkowych poprzez poszukiwanie najbardziej prawdopodobnych planarnych geometrii wirtualnych kompleksów (klastrów) n -cząstkowych (najbardziej prawdopodobne ustawienie n -tej cząstki, kiedy skonfigurowano ustawienie wg mapy gęstości prawdopodobieństwa definiowanej przez wielocząstkową funkcję falową, a odczy-

tywanej metodą podobną do indukcji matematycznej dla $n - 1$ itd. aż do 1, stosowana jest tu oryginalnie rozwinięta metoda kwantowej symulacji Monte Carlo z elementami algorytmu symulacji wyżarzania [13]). Uzyskane w ten sposób wizualizacje korelacji wirtualnego kryształu Pauliego (typu 'szczegółowej równowagi' podobnie jak w rozkładach statystycznych) są indywidualnym portretem korelacji dla poszczególnych wypełnień hierarchii FQHE. Symetria tych korelacji odzwierciedla postać generatorów poszczególnych konfiguracji współmierności. Dla porównania pokazujemy zaburzenia tej symetrii w stanach proponowanych w modelu CF, gdzie symetria ulega deformacji w wyniku heurystycznych procedur rzutowania [40] z wyższych poziomów na LLL w metodzie CF dla uzyskania holomorficzności funkcji falowej. Rzutowanie zaburza symetrię w niekontrolowany sposób, czego unika się w systematycznym podejściu grup warkoczowych, gdzie symetria jest ściśle definiowana przez postać generatorów podgrup warkoczowych wraz z podziałem na skorelowane w różnym stopniu podzbiory bliższych i dalszych sąsiadów (podobnie do metody Halperina [51]) a znalezienie funkcji falowej nie wymaga rzutowania z wyższych poziomów Landaua i 'ręcznego' usuwania biegunów.

2.14 Homotopijne uwarunkowania IQHE, rola oddziaływania i uniwersalność współmierności

Należy dodać że rozpatrywana przez nas współmierność nie dotyczy rozmiarów w sensie promienia orbit, ale raczej ich powierzchni i definiowana jest przez archetyp współmierności dla IQHE – kiedy każda orbita cyklotronowa (nie wchodząc w jej kształt) zabiera kwant strumienia $\frac{h}{c}$, a liczba orbit dokładnie równa się liczbie elektronów, co daje pełny strumień przez całą powierzchnię próbki, czyli powierzchnia orbity jest równa powierzchni próbki przypadającej na pojedynczy elektron (nie może być wtedy idealnie kolista [koła nie wypełniają płaszczyzny] i rzeczywiście nie jest taka w układzie z oddziaływaniem – dlatego należy się posługiwać współmiernością powierzchni, a nie promieniem i tak postępujemy w modelu warkoczowym). W sensie grup warkoczowych, stan IQHE (kiedy $\frac{S}{N} = \frac{S}{N_0} = \frac{h}{eB}$) jest zatem podstawowym wzorcem współmierności cyklotronowej oddziałujących elektronów. Dostrzegamy tu, że w wyżej opisanym sensie stan IQHE jest równie kolektywnym skorelowanym wielocząstkowym stanem uwarunkowanym przez oddziaływanie (jak stany FQHE), odpychanie elektronów zapewniające równomierne wignerowskie rozłożenie elektronów na płaszczyźnie jellium (klasyczny punkt wyjścia dla całki Feynmana), niezbędne dla współmierności, a nie jak często jest argumentowane w literaturze w odniesieniu do IQHE, stanem 'rozumiałym jednocząstkowo'. Popularna terminologia 'jednocząstkowy' wiąże się tu z faktem, że gdy wielomian Jastrowa przechodzi w wielomian Vandermonde'a w funkcji Laughlina, jak dla IQHE, to stan układu z oddziaływaniem elektronów ma tę samą funkcję falową jak układ bez oddziaływania (zadaną przy oddziaływaniu przez współmierność określoną dla $\nu = 1$ pełną grupą warkoczową, taką samą jak dla gazu [i dla gazu jedyną możliwą], ale w gazie grupa ta nie określa korelacji, tylko statystykę przez 1DUR – w gazie nie ma współmierności). Ale oczywiście energie są inne, ponieważ ten sam analitycznie wyrażony stan przez wielomian Vandermonde'a (wyznacznik Slatera z jednocząstkowych funkcji Landaua) odpowiada różnym hamiltonianom (jak udowodnił to też niezależnie Haldane w terminach pseudopotencjałów [52]). Układ bez oddziaływania ma energię zero w tym stanie licząc od najniższego zdegenerowanego poziomu Landaua, a układ z oddziaływaniem – w zgodzie z rzeczywistym eksperymentalnym stanem IQHE realizowanym przecież przez elektrony z oddziaływaniem – ma energię mniejszą ($-0.58 \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l_B}$ na cząstkę [8]) związaną z energią oddziaływania skorelowanych wg wielomianu Vandermonde'a elektronów z samymi sobą i z dodatnim jellium (co bezpośrednio wyliczyć można np. metodą Monte Carlo Metropolis [69]). Trzeba tu zauważyć, że w układzie bez oddziaływania (w gazie) współmierność warkoczy traci sens ponieważ odległości między elektronami mogą być w gazie dowolne. Zatem oddziaływanie jest podstawowym prerekwizytem do rozwinięcia topologicznego opisu hierarchii FQHE i warunkuje również realizację rzeczywistego stanu IQHE, chociaż funkcja falowa tego ostatniego jest tej

samej postaci dla układu bez oddziaływania, ale nie jest to wtedy stan skorelowany. Innymi słowy, w gazie niemożliwe są stany skorelowane (w tym niemożliwe są stany FQHE ale i też IQHE), chociaż możliwe jest kompletne wypełnienie LLL (i wyższych LL) przez elektrony – ale to nie oznacza IQHE, muszą jeszcze być korelacje, a do tego potrzebne jest oddziaływanie. Odpychające oddziaływanie między elektronami ustala odległości między nimi na płaszczyźnie jellium, co warunkuje współmierność cyklotronową w całym układzie dopuszczalną dla specyficznych tylko wypełnień (dyskretna hierarchia FQHE i też stan IQHE). Dopuszczalne warunki określają wtedy wielocząstkowe korelacje.

Stany FQHE i IQHE nie są zatem fazami kwantowymi z lokalnym parametrem porządku (związanym z operatorem masowym od oddziaływania [73]), są kolektywnymi silnie skorelowanymi stanami całego wielocząstkowego układu z korelacjami zdefiniowanymi topologicznie przez cyklotronową podgrupę warkoczową specyficzną dla danej koncentracji elektronów, czyli wypełnienia poziomu Landaua. Stany te można nazwać fazami topologicznymi homotopii, a ich energie określone są przez kolektywne korelacje warkoczowe w całym układzie dostosowane poprzez konfigurację współmierności do koncentracji elektronów na płaszczyźnie (energie te można zidentyfikować np. metodą Metropolis Monte-Carlo albo dokładną diagonalizacją oddziaływania). Zauważyć należy też, że koncepcja współmierności cyklotronowych warkoczy z rozkładem elektronów jest uniwersalna, tj. homotopie trajektorii nie są czułe na szczegóły dynamiki w różnych materiałach GaAs, czy grafenie a nawet w ułamkowym topologicznym izolatorze Cherna [37,38]. W tym ostatnim przypadku, w kontynuacji koncepcji Haldane’a [49], mamy do czynienia z całkowitym efektem Halla i następnie z typową hierarchią ułamkową mimo braku jednorodnego kwantującego pola magnetycznego. Całkowity i ułamkowy efekt Halla odpowiada tu korelacjom kulombowsko odpychających się elektronów równomiernie rozłożonych na płaszczyźnie kryształu zdefiniowanym przez współmierność ich odległości z rozmiarami orbit uwzględniając przy tym wielopętłowe trajektorie o zwiększonym rozmiarze, a zadawane przez kwantowanie strumienia pola Berry [80] przy obejści komórki elementarnej, w zamian strumienia pola magnetycznego.

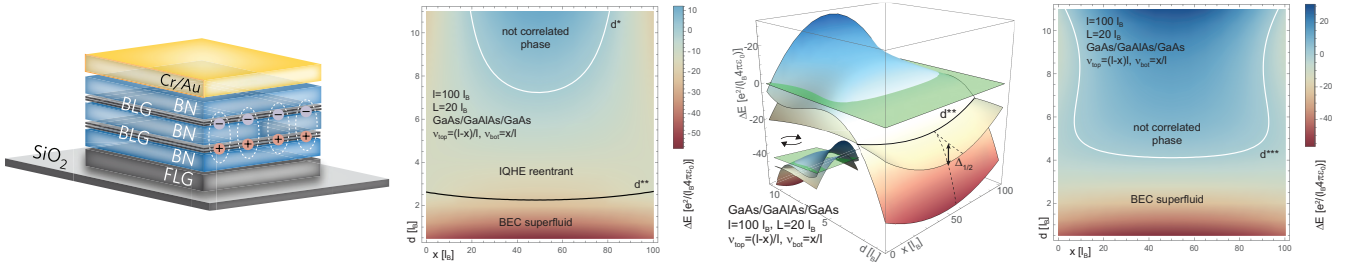
2.15 Wykres fazowy konkurencji nadciekłości ekscytonów i IQHE-*reentrant* w podwójnym układzie hallowskim z barierą i przy komplementarnym ułamkowym wypełnieniu

Wykorzystanie wyżej opisanych obserwacji (a także możliwość obliczania energii dla dużej liczby cząstek metodą kwantowego Monte-Carlo, a nie tylko dla co najwyżej kilkunastu w wariacyjnej dokładnej diagonalizacji), zostało rozbudowane w kolejnych pracach autora [3, 4] do analizy rozwijanej intensywnie ostatnio [81–83] nowej konfiguracji eksperymentalnej układów hallowskich, a mianowicie dwóch układów Halla rozdzielonych warstwą izolatora na tyle grubą, by zapobiegać tunelowaniu elektronów między warstwami Halla, ale też dostatecznie cienką by zapewnić silne oddziaływanie Coulomba obu warstw. Dla hallowskich układów GaAs stosuje się izolator GaAlAs o grubości $d > 1.4l_B$, gdzie $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ to długość magnetyczna (dla $B = 10\text{T}$ wynosi ona około 10 nm), a dla warstw grafenu stosuje się izolator hBN (heksagonalny azotek boru) o lepszych własnościach izolacyjnych niż GaAlAs i blokowanie tunelowania zachodzi tu nawet dla $d \sim 0.5l_B$ (obydwa izolatory dopasowane są strukturą krystaliczną do odpowiednich układów hallowskich, by nie wprowadzać zaburzającego nieporządku). To właśnie opanowanie wytwarzania kanapkowych struktur grafenu (zwłaszcza dodatkowo jeszcze z grafenem dwuwarstwowym jako warstw hallowskich) bardzo zaawansowało ten eksperyment w 2017 [82, 83]. Cel eksperymentów jest tu wyjątkowo ambitny, ponieważ zakłada się i układ realizuje nadciekły kondensat międzywarstwowych ekscytonów [84], par elektron-dziura z pasm Landaua ulokowanych w dwóch przeciwległych warstwach hallowskich, a wytwarzanych w komplementarnie wypełnionych warstwach, $\nu_{top} + \nu_{bot} = 1$, czyli pochodzących z pasm landauowskich obu rozdzielonych izolatorem warstw, *top* i *bottom*.

Fenomen nadciekłości rozdzielonych i przez to stabilnych ekscytonów jest intrygujący, a eksperymentalnie obserwowane są tu efekty typu wleczenia (*drag*) wzajemnie sprzężonych międzywarstwowo nośników i efekt przeciwprądu (*counterflow*), traktowany jako eksperymentalny dowód nadciekłości kondensatu. Oryginalnie zastosowaliśmy i rozwinęliśmy dwuskładnikowy model Bogolubova [4] dla nadciekłych ekscytonów. W stosunku do wcześniejszych modeli zaproponowaliśmy modyfikację, a mianowicie dwuskładnikowy kondensat (w oryginalnych wcześniejszych pracach rozwijany był model jednoskładnikowy, będący prostszym uogólnieniem hipotetycznych [niestabilnych] ekscytonów w jednej warstwie, kiedy ich poprzeczna polaryzacja nie miała znaczenia i nie była definiowana [85, 86]). Gdy jednak warstwy są przestrzennie rozdzielone, polaryzacja międzywarstwowych ekscytonów (\pm) lub (\mp) odgrywa istotną rolę i okazuje się ona, naszym zdaniem [4], decydująca dla stabilności nadciekłego kondensatu, co urealnia opis. W modelu Bogolubova widać, że nadciekłość wymaga odpychania bozonów w kondensacie – ekscytony wprawdzie nie są idealnymi bozonami, gdyż tworzą je pary fermionów w pojedynczo obsadzanych tylko stanach, to jednak kondensacja takich ekscytonów w rozpatrywanym układzie jest możliwa, ponieważ niezależnie od koniecznie różnych kwantowych stanów elektronów i dziur (fermionów) w komplementarnie zapełnionych pasmach Landaua obu warstw, wszystkie te elektrony i dziury mają tę samą energię związaną z maszyną degeneracją poziomów Landaua – zatem i ekscytony mają wszystkie tę samą energię [85] – kondensują w kondensat Bosego-Einsteina i przechodzą w stan nadciekły, o ile się odpychają. Właśnie to odpychanie jest powiązane z wzajemnym rozkładem przestrzennym obu składników kondensatu o przeciwnych polaryzacjach, co proponujemy w pracach [3, 4]. W modelu proponujemy oryginalnie strukturę naprzemiennych z przeciwną polaryzacją (naprzemiennie w warstwie i też międzywarstwowo) pasków (*stripes*) w przestrzeni k (gdzie k numeruje stany elektronów i dziur w pasmach Landaua, przy cechowaniu Landaua); pokazujemy też, że struktura pasków jest niezmiennicza na wybór cechowania i zapewnia optymalne odpychanie ekscytonów i stabilność nadciekłych faz obu polaryzacyjnych składników w dwuwarstwowym układzie. Z tą strukturą konkuruje w naszym modelu stan IQHE-*reentrant*, również optymalizowany (właśnie przy pomocy dostosowanej kwantowej numeryki Metropolisa Monte Carlo²³) w strukturze paskowej, kiedy lokalnie następuje przemieszczenie elektronów, tak by uzyskać energetycznie korzystny stan skorelowany IQHE w całkowicie zapełnionym pasku z $\nu_{local} = 1$, mimo ułamkowego nominalnego zapełnienia całej warstwy. Wykazaliśmy przy tym [3, 4], że efekt IQHE-*reentrant* jest silnie wzmocniony w dwuwarstwowej strukturze w wyniku oddziaływania poprzez barierę komplementarnie i naprzemiennie ułożonych pasków (*stripes*) w przeciwległych warstwach.

W pracy [4] przeprowadziliśmy symulacje Monte Carlo Metropolisa całego układu kwantowego uwzględniając konkurencję stanów nadciekłego kondensatu i IQHE-*reentrant* i znaleźliśmy diagramy fazowe całego układu w zależności od niezrównoważenia komplementarnego zapełnienia warstw, tj. dla zmiennych ułamkowych ν_{top} i ν_{bot} , z warunkiem $\nu_{top} + \nu_{bot} = 1$ i od grubości d bariery izolatora, w dwóch różnych konfiguracjach eksperymentalnych [87]: *counterflow* i *drag*. Diagramy fazowe (po raz pierwszy znalezione teoretycznie przez nas dla tych układów) okazały się być w dobrej zgodności z eksperymentem dla GaAs/GaAlAs/GaAs i też dla b-graphene/hBN/b-graphene (b-graphene oznacza tu dwuwarstwowy grafen pary układów hallowskich) i odtwarzają charakterystyczne szczegóły zachowania obserwowanych eksperymentalnie układów. Zgodność jest ilościowa odnośnie położenia krzywych przejść fazowych i energii aktywacji fazy nadciekłej (niewyjaśnionej poprzednio i znacznie mniejszej niż energia sparowania ekscytonów, ponieważ w konkurencji fazowej

²³Metoda Metropolisa Monte Carlo [69] jest skuteczna dla obliczania silnie wielokrotnych całek (np. o krotności kilku tysięcy) dla wartości oczekiwanej np. energii z wielocząstkowych funkcji falowych poprzez losową wędrówkę w przestrzeni konfiguracyjnej wszystkich cząstek ze sprzężeniem zwrotnym gwarantującym przyrost prawdopodobieństwa wg. funkcji falowej znajdującej konfiguracji położenia cząstek; po $\sim 10^8$ takich krokach uzyskuje się rozkład 'szczegółowej równowagi' i odpowiadającą mu średnią szukaną wielkość. Uśrednienie po dużej liczbie tego typu różnych losowo uzyskanych rozkładów 'szczegółowej równowagi' daje kwantową średnią szukaną wielkość z bardzo wysoką dokładnością.



Rysunek 12: Przykładowe diagramy fazowe dla konkurencji nadciekłego kondensatu ekscytonów i IQHE-*reentrant* dla konfiguracji *counterflow* i *drag*; pierwszy panel – schemat układu b-graphene/hBN/b-graphene, drugi panel – diagram fazowy dla GaAs/GaAlAs/GaAs (*drag*), trzeci panel – hiperpowierzchnie energii konkurujących stanów dla GaAs/GaAlAs/GaAs (*drag*), czwarty panel – diagram fazowy dla GaAs/GaAlAs/GaAs (*counterflow*) [3, 4]

pomniejszona jest o zysk energetyczny IQHE-*reentrant*). Wyjaśniliśmy też [4] dwie zagadkowe obserwacje eksperymentalne z 2017 roku w b-graphene/hBN/b-graphene:

1. Brak sygnału *counterflow*, czyli zanik nadciekłości w stanach *b-graphene* z $n = 1$, mimo obecności nadciekłości ekscytonów (*counterflow*) w stanach z $n = 0$ i $n = 2$ [82]. Wynika to naszym zdaniem z czterokrotnie mniejszego, jak oszacowaliśmy, odpychania elektronów (lub dziur) z podpasma LLL *b-graphene* z $n = 1$ w porównaniu z odpychaniem tych cząstek w stanach z $n = 0$ w LLL lub z $n = 2$ w pierwszym LL (dla $n = 1$ nie ma piku centralnego w profilu modułu funkcji falowej Landaua, czyli gęstości ładunku, zgodnie z postacią wielomianu Hermite'a dla stanu $n = 1$, w przeciwieństwie do odpowiednich profili dla stanów z $n = 0$ lub $n = 2$, które posiadają pik centralny [w dowolnym cechowaniu]; powoduje to dla $n = 1$ silne przekrycie sąsiednich stanów w pasku k i osłabienie odpychania tych sąsiadów, w przeciwieństwie do stanów z pikiem centralnym, jak dla $n = 0$ lub $n = 2$). Znacznie słabsze odpychanie destabilizuje nadciekłość kondensatu Bosego-Einsteina.
2. Drugim wytłumaczonym efektem jest z kolei brak reakcji typu *drag* i odpowiedzi Halla dla stanów z pasma walencyjnego ($\nu_{top} = -\frac{1}{2}, \nu_{bot} = -\frac{1}{2}$) w b-graphene/hBN/b-graphene, mimo że silnie zaznaczone są te odpowiedzi w symetrycznym wypełnieniu pasma przewodnictwa ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) tego samego materiału. Zaproponowany przez nas model *stripes* wyjaśnia to anomalne (niesymetryczne) zachowanie faktem, że gdy dziury landauowskie w pasmie walencyjnym (dziurowym też pasmowo) są przesunięte na skutek tworzenia pasków do dziurowego paska w sensie podpoziomu Landaua, a wszystko odbywa się u szczytu pasma walencyjnego pasmowo, to zupełnie brak jest w tym dziurowym pasku elektronów. Pozostaje wtedy tylko 'puste' jellium, które nie jest dynamiczne w sensie Halla. Podobnie przeciwnego znaku pasek nie da odpowiedzi Halla dla $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, gdyż w tym przypadku kompletnie wypełnione lokalnie pasmo walencyjne oddalone jest w *b-graphene* szczeliną od pustego pasma przewodnictwa i też jest pasywne hallowsko. Taka sytuacja nie występuje dla wypełnienia struktury $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ i stąd asymetria i różnica zanotowana w obserwacjach [82]. Sygnał IQHE-reentrant powraca jednak, gdy któraś z warstw w pasmie walencyjnym uzyska dodatkowe stopnie swobody dynamicznej poprzez mocniejsze wypełnienie dziurami walencyjnymi o swojej własnej dynamice (np. dla konfiguracji wypełnienia struktury b-graphene/hBN/b-graphene $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ z $\nu_{total} = \nu_{bot} + \nu_{top} = -2$), co też zgadza się z eksperymentem [82, 83].

W pracy [3] została z kolei wyjaśniona po raz pierwszy konkurencja i synergia międzywarstwowego tunelowania i międzywarstwowego oddziaływania w organizacji kolektywnego stanu układu podwójnego. Zostały

wyjaśnione [3] pionierskie wyniki z lat 90. [88, 89] o dziwnych i niezrozumiałych dotąd stanach FQHE w podwójnych układach hallowskich GaAs przy wypełnieniach $1/4$ i $1/2$ każdej z warstw przy dopuszczalnym tunelowaniu międzywarstwowym i znikaniu tych stanów przy wzmocnieniu izolującej bariery między warstwami. Nasz model homotopii trajektorii [3] (skuteczny też w grafenie duwarstwowym *b-graphene*, jak opisano wyżej) w kompletny sposób wyjaśnił obserwowane wypełnienia dla FQHE w obu eksperymentach [88, 89], a także szczegóły korelacji gdy tunelowanie zostanie zablokowane [4]. Podanie tego wyjaśnienia eksperymentów [88, 89] jest jednym z istotniejszych wyników w przestawianym osiągnięciu.

2.16 Podsumowanie

Rozwinięty i zademonstrowany w zastosowaniach model kwantowych faz homotopii wydaje się ważnym elementem rozwoju opisu stanów hallowskich. Model ten:

- jest ścisły matematycznie (wykorzystuje dobrze rozwinięty aparat topologii algebraicznej grup homotopii π_1 , w szczególności warkoczowych),
- oryginalnie wprowadza do struktury grupy homotopii warkoczowych współmierność cyklotronową – definiuje cyklotronowe podgrupy warkoczowe,
- definiuje kwantową hierarchię FQHE w oparciu o formalizm całek Feynmana dla układów wielu cząstek oddziałujących na rozmiarowości 2D w kwantującym polu o wyjątkowo bogatej grupie warkoczowej o cyklotronowych podgrupach wybieranych przez współmierność,
- jest uniwersalny, stosuje się do LLL i wyższych LL zarówno w 2DEG GaAs w polu magnetycznym jak i w grafenie jednowarstwowym i wielowarstwowym w polu magnetycznym, a nawet do topologicznych izolatorów Cherna z polem magnetycznym zastąpionym przez pole Berry (bez poziomów Landaua, a ułamkowe wypełnienie definiuje się tu na komórkę elementarną),
- definiuje kompletną hierarchię FQHE, metalu Halla i stanów sparowanych w pełnej zgodności z dostępnymi danymi eksperymentalnymi (około 150 szczegółów hierarchii w 2DEG GaAs i w grafenie),
- wyjaśnia kontrowersyjny anomalny FQHE obserwowany w grafenie dwuwarstwowym,
- wyjaśnia naturę stanów spoza głównej hierarchii CF w LLL (nazywanych w literaturze *enigmatic* i obserwowanych w 2DEG GaAs),
- wyjaśnia istotę fenomenologicznego modelu CF i podaje zakres jego stosowalności, uzasadnia też strukturą korelacji dalszych sąsiadów co odpowiada modelowi wieloskładnikowych stanów Halperina,
- podaje ścisłą metodę znajdowania funkcji próbnych i precyzyjnie określa ich symetrię (w przeciwieństwie do rzutowania na LLL z wyższych LL w modelu CF),
- podaje stany (funkcje falowe) z hierarchii FQHE z bardzo dobrą zgodnością ich energii z dokładną diagonalizacją oddziaływania i z eksperymentalnymi wartościami energii aktywacji,
- pozwala na rozwój całki Feynmana dla różnych konfiguracji współmierności i dla niestacjonarnych stanów kwantowych,
- odtwarza po raz pierwszy $R_{xx}(\nu)$ w układzie Halla ze względnymi różnicami wartości podłużnego oporu dla różnych wypełnień zgodnymi z eksperymentem (LLL in GaAs),

- definiuje uogólnienie zasady Bohra-Sommerfelda dla niejednospójnych przestrzeni, co pozwala na (niezależne od oddziaływania) znalezienie innego kwantu strumienia pola magnetycznego w przypadku niejednospójnej przestrzeni,
- pozwala na rozwój ilościowego opisu IQHE-*reentrant* i znalezienie po raz pierwszy wykresu fazowego konkurencji nadciekłości ekscytonów i IQHE-*reentrant* w podwójnych układach hallowskich z dielektryczną barierą w dobrej ilościowej zgodności z obserwacjami w GaAs/GaAlAs/GaAs i w b-graphene/hBN/b-graphene,
- pozwala na identyfikację roli tunelowania w układach podwójnych i synergię z oddziaływaniem w organizacji skorelowanych stanów FQHE w układach podwójnych, niewytłumaczonych w konwencjonalnych modelach,
- pozwala na wizualizację korelacji w kolektywnych stanach FQHE (poprzez wirtualny kryształ Pauliego).

Z zestawionego zakresu przedstawianego modelu i jego zastosowań dostrzec można jego użyteczność dla większego zrozumienia uwarunkowań FQHE i wyjaśnienie istoty wcześniej stosowanych szeroko modelu CF i wieloskładnikowego modelu Halperina. Przekonuje bardzo dobra zgodność z eksperymentem nowego topologicznego opisu odnośnie wszystkich znanych do tej pory detali hierarchii FQHE w różnych materiałach, a zwłaszcza skuteczne wyjaśnienie anomalnego FQHE w dwuwarstwowym grafenie niemożliwego do interpretacji w ramach konwencjonalnego opisu CF, a zaobserwowanego w licznych szczegółach z wyjątkowo wysoką (rekordową aż do 8-go podpasma) precyzją, czy też odtworzenie po raz pierwszy przebiegu oporności podłużnej w zależności od zapełnienia LLL w GaAs. Istotne jest też odwołanie się do ścisłych matematycznie wyników, spośród których rozstrzygający i podstawowy charakter ma uogólnienie reguły Bohra-Sommerfelda dla wielospójnych przestrzeni, formalizm warkoczowej podgrupy cyklotronowej oraz wykonanie rozstrzygającego eksperymentu zmiany topologii zewnętrznym czynnikiem w zgodzie z warkoczowym modelem (eksperyment z zablokowaniem przeskoku trajektorii w *b-graphene* przez prostopadłe pole elektryczne, wykonany wcześniej (2014) w innym celu).

Zaproponowany model faz homotopii cyklotronowych grup warkoczowych skutecznie wyjaśnia wszystkie eksperymentalnie zaobserwowane jak dotąd elementy hierarchii FQHE. Jest to szczególnie istotne w odniesieniu do nowych obserwacji z ostatnich lat w grafenie dwuwarstwowym i jednowarstwowym oraz w wyższych LL wszystkich materiałów hallowskich, gdzie konwencjonalny opis CF okazuje się nieskuteczny. Rozwikłanie też istoty heurystycznego modelu CF oraz określenie zakresu jego stosowalności (tj. ograniczenie do współmierności najbliższych sąsiadów, czyli do $x = 1$, jak zostało wyżej opisane) jest tu znaczącym osiągnięciem, podobnie jak szczegółowe wyjaśnienie dlaczego model CF nie może być w wielu bardziej złożonych przypadkach stosowany. Należy też dodać, że silnie zachowawcze podejścia zwolenników modelu CF szeroko rozpowszechnione w odniesieniu do FQHE od ponad 25 lat powodowało, że opublikowanie konkurencyjnej i nawet z istotnymi przewagami teorii natrafiało i natrafia na silny opór twórców i kontynuatorów modelu CF²⁴. Wyraźnie jednak widoczne jest, że CF nie są realnymi kwazicząstkami, a kwanty pomocniczego pola 'przyczepiane' w tym modelu do elektronów są tylko ilustracją dodatkowych pętli cyklotronowych (jedna pętla – jeden kwant) i nie są rezultatem lokalnego ubierania elektronów w oddziaływanie jak sugeruje model CF, ale są wynikiem w pierwszym rzędzie nielokalnej specyficznej współmierności warkoczy oddziałujących cząstek i tylko w szczególnie prostym przypadku tej współmierności zgodnym z przewidywaniami CF. Oddziaływanie nie odgrywa tu roli 'ubrania kwazicząstki' jak np. dla kwazicząstek Landaua w metalu. Mimo

²⁴Szczególnie w PRL gdzie EBM był Jainendra K. Jain a Ed. działu QHE jest Samidranath Mitra i w PRB gdzie Ed. działu QHE jest Hari Dahal – zwolennicy modelu CF Jaina.

popularności mylącej 'kwazicząstkowej' interpretacji CF ostatnio wzrasta jednak zainteresowanie nową topologiczną nielokalną teorią FQHE ze strony specjalistów, m.in. A. MacDonalda, Z. Papica, D. Haldane'a, D. Golghabera-Gordona, F. Peetersa.

Model warkoczowy ujmuje zasadniczą rolę oddziaływania między elektronami prowadzącego do specyficznych korelacji FQHE, ale uregulowanych przez topologiczne uwarunkowania kwantowania wynikające z natury specyficznych homotopii płaskich układów (a nie przez samo oddziaływanie²⁵), co prowadzi do powstawania różnych faz homotopii dla różnych zapełnień poziomów Landaua w różny sposób dopuszczających specyficzne konfiguracje warkoczowej współmierności w 2D. Całka Feynmana precyzuje, że oddziaływanie wchodzi do niej dwukanałowo – poprzez współmierność możliwą wyłącznie w układzie z oddziaływaniami i poprzez lagranżjan w działaniu. Te same kanały występują też niejawnie w dokładnej diagonalizacji dla określonej liczby cząstek i rozmiarów próbki i wielkości pola magnetycznego (czyli także współmierności) a mylące jest tu odnoszenie przyczyn różnic w hierarchii FQHE (np. w wyższych LL) do różnic stanów jednocząstkowych (te ostatnie decydują o wielkości energii aktywacji faz ale wybranych jednak przez współmierność). Warkoczowy model określa hierarchię FQHE bardziej kompletnie niż model CF czy model Halperina i nie posiłkuje się fenomenologicznymi założeniami a wręcz wyjaśnia sens tych założeń poczynionych w innych modelach. Argumentem wspierającym opisane osiągnięcie jest formalny matematycznie charakter modelu podgrup warkoczowych i pełna zgodność ilościowa (hierarchii i energii faz homotopii) z eksperymentalnymi obserwacjami w różnych mikroskopowo materiałach przy uwzględnieniu też topologicznych odmienności (jak np. w *b-graphene* z możliwością przeskoku trajektorii między warstwami). Cykl prac [1–16] ma charakter publikowania kolejno rozwijanych elementów całego modelu i zastosowań, najbardziej zaawansowane i istotne w przedstawionym osiągnięciu publikacje to [1–5, 7, 9].

Szczegółowe istotniejsze rezultaty z odniesieniem do publikacji włączonych do osiągnięcia:

1. uogólnienie reguły Bohra-Sommerfelda na przypadek przestrzeni wielospójnej [1]
2. wprowadzenie współmierności cyklotronowej do struktury grupy warkoczowej (cyklotronowe podgrupy warkoczowe) [2, 8, 16]
3. znalezienie kwantu strumienia magnetycznego w niejednospójnej przestrzeni z warkoczową grupą cyklotronową [1]
4. wprowadzenie pojęcia fazy homotopii i fazowego przejścia kwantowego homotopii [1, 2, 7]
5. uogólnienie całki Feynmana na różne fazy homotopii [9, 12, 16]
6. wyprowadzenie pełnej hierarchii FQHE w LLL GaAs wraz z *enigmatic* zapełnieniami [5, 8, 14, 15]
7. podanie funkcji falowych dla stanów z hierarchii, obliczenie (Metropolis-MC) energii [2, 8, 15]
8. podanie wyjaśnienia modelu CF i jego ograniczeń [1, 2, 16]
9. wprowadzenie nowej klasy FQHE (jednopętlowych) w wyższych LL [11]
10. ilustracja zaburzeń symetrii przy rzutowaniu na LLL w modelu CF, wirtualny kryształ Pauliego dla faz homotopii [13]
11. wyjaśnienie uniwersalności modelu warkoczowego dla FQHE (GaAs, grafen, ułamkowy topologiczny izolator Cherna) [1, 2, 5, 8]
12. wyjaśnienie przyczyny konieczności bardzo wysokiej ruchliwości nośników dla organizacji FQHE [10]
13. wyprowadzenie hierarchii metalu Halla i stanów sparowanych (GaAs, grafen, LLL i wyższe LL) [2, 5, 7, 13, 15]
14. wyjaśnienie niekonwencjonalnej hierarchii FQHE w grafenie jednowarstwowym, $n = 1$ [5, 6, 14]
15. wyjaśnienie anomalnej hierarchii FQHE w grafenie dwuwarstwowym, $n = 0, 1, 2$ [2, 6]

²⁵Dla przykładu, nie obserwuje się FQHE w 3D mimo oddziaływania.

16. uogólnienie całki Feynmana na stan niestacjonarny i znalezienie po raz pierwszy $R_{xx}(\nu)$ dla LLL GaAs [1]
17. wprowadzenie dwuskładnikowego modelu Bogolubova nadciekłości ekscytonów w komplementarnie zapełnionym podwójnym układzie Halla i zaproponowanie modelu *stripes* (w przestrzeni k i rzeczywistej) [4]
18. znalezienie wykresu fazowego konkurencji nadciekłości i IQHE-*reentrant* w podwójnym układzie Halla [3, 4]
19. wyjaśnienie braku *counterflow* dla stanu $n = 1$ LLL w *b-graphene* i braku sygnału Halla dla zapełnienia $(-0.5, -0.5)$ w układzie b-graphene/hBN/b-graphene [4]
20. wyjaśnienie synergii i konkurencji tunelowanie-oddziaływanie w układach podwójnych i wyjaśnienie zagadkowych stanów FQHE 1/4 i 1/2 w podwójnych układach GaAs z tunelowaniem międzywarstwowym [3]

Literatura

- [1] J. Jacak, “Application of the path integral quantization to indistinguishable particle systems topologically confined by a magnetic field,” *Phys. Rev. A* **97**, p. 012108, 2018.
- [2] J. Jacak, “Unconventional fractional quantum Hall effect in bilayer graphene,” *Sci. Rep.* **7**, p. 8720, 2017.
- [3] J. Jacak, “Superfluidity of indirect excitons vs quantum Hall correlation in double Hall systems: different types of physical mechanisms of correlation organization in Hall bilayers,” *Phys. Lett. A*, 2018. doi.org/10.1016/j.physleta.2018.07.007.
- [4] J. Jacak, “Phase diagrams for superfluidity of indirect excitons in double Hall systems GaAs/GaAlAs/GaAs and bilayer-graphene/hBN/bilayer-graphene,” *Europhys. Lett.* **123**, p. 16001, 2018. (+ Supplementary Materials 1-11), doi.10.1209/0295-5075/123/16001.
- [5] P. Łydźba, L. Jacak, and J. Jacak, “Hierarchy of fillings for the FQHE in monolayer graphene,” *Scientific Reports* **5**, p. 14287, 2015.
- [6] J. Jacak and L. Jacak, “Unconventional fqhe in monolayer and in bilayer graphene,” *Science and Technology of Advanced Materials* **17**, p. 149, 2016.
- [7] J. Jacak and L. Jacak, “Commensurability condition and hierarchy of fillings for fqhe in higher landau levels in conventional 2deg systems and in graphene—monolayer and bilayer,” *Phys. Scr.* **91**, p. 015802, 2016.
- [8] J. Jacak, “Unconventional fractional quantum Hall effect in bilayer graphene,” *Sci. Rep. Supplementary Information* **7**, pp. 8720(1–14), 2017.
- [9] J. Jacak and L. Jacak, “Explanation of $\nu = -1/2$ fractional quantum hall state in bilayer graphene,” *Proc. R. Soc. A* **472**, p. 20150330, 2016.
- [10] J. Jacak and L. Jacak, “On triggering role of carrier mobility for Laughlin state organization,” *JETP Letters* **98**, p. 776, 2013.
- [11] J. Jacak and L. Jacak, “The commensurability condition and fractional quantum hall effect hierarchy in higher Landau levels,” *JETP Letters* **102**, pp. 19—25, 2015.
- [12] P. Łydźba and J. Jacak, “Topological origin and not purely antisymmetric wave functions of many-body states in the lowest Landau level,” *Proc. Royal Soc. A* **473**, p. 20160758, 2017.
- [13] P. Łydźba and J. Jacak, “Identifying particle correlations in quantum hall regime,” *Annalen der Phys.* **530**, p. 1700221, 2018.
- [14] J. Jacak and L. Jacak, “Difference in hierarchy of FQHE between monolayer and bilayer graphene,” *Phys. Lett. A* **379**, p. 2130, 2015.
- [15] J. Jacak, P. Łydźba, and L. Jacak, “Topological approach to quantum Hall effects and its important applications: higher Landau levels, graphene and its bilayer,” *Eur. Phys. J. B* **90**, p. 90, 2017.
- [16] J. Jacak, R. Gonczarek, L. Jacak, and I. Jóźwiak, *Application of Braid Groups in 2D Hall System Physics: Composite Fermion Structure*, World Scientific, Singapore, 2012.
- [17] J. Jacak, *Topological approach to Fractional Quantum Hall Effect in monolayer and bilayer graphene*, ch. Handbook on the Graphene Materials. Advanced Materials Book Series, Wiley, 2018.

- [18] J. Jacak, I. Jóźwiak, L. Jacak, and K. Wieczorek, “Cyclotron braid group structure for composite fermions,” *J. Phys. Cond. Matter* **22**, p. 355602, 2010.
- [19] J. Jacak, P. Łydzba, and L. Jacak, “Homotopy approach to fractional quantum Hall effect,” *Appl. Math.* **6**, p. 345, 2015.
- [20] J. Jacak and L. Jacak, “The triggering role of carrier mobility in the fractional quantum Hall effect formation—an evidence in graphene,” *J. Mod. Phys.* **4**, p. 1591, 2013. invited to Special Issue: Topological Insulators and Low Dimensional Quantum Physics.
- [21] J. Jacak, P. Łydzba, and L. Jacak, “Fractional quantum Hall effect revisited,” *Physica B* **475**, p. 122, 2015.
- [22] J. J. P. Łydzba, “Many-body wave functions for correlated systems in magnetic fields: Monte Carlo simulations in the lowest Landau level,” *J. Phys. Cond. Matter*, 2018. (in press).
- [23] J. Jacak and L. Jacak, “Recovery of Laughlin correlations with cyclotron braids,” *Europhysics Lett.* **92**, p. 60002, 2010.
- [24] J. Jacak, I. Jóźwiak, and L. Jacak, “Composite fermions in braid group terms,” *Open Sys. and Inf. Dyn.* **17**, p. 1, 2010.
- [25] J. Jacak, “Bilayer graphene as the material for study of the unconventional fractional quantum Hall effect,” in *Graphene Materials: Structure, Properties and Modifications*, G. Z. Kyzas, ed., ch. 3, pp. 49–76, INTECH, 2017.
- [26] J. Jacak, I. Jóźwiak, and L. Jacak, “New implementation of composite fermions in terms of subgroups of a braid group,” *Phys. Lett. A* **374**, p. 346, 2009.
- [27] J. Jacak, I. Jóźwiak, L. Jacak, and K. Wieczorek, “Cyclotron braid group approach to Laughlin correlations,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **15**, p. 449, 2011.
- [28] J. Jacak, R. Gonczarek, L. Jacak, and I. Jóźwiak, “Explanation of composite fermion structure in fractional quantum Hall systems,” *Int. J. Mod. Phys. B* **26**, pp. 1230011–1–60, 2012.
- [29] P. Łydzba and J. Jacak, “Ultra-quantum 2d materials: Graphene, bilayer graphene, and other Hall systems—new non-local quantum theory of Hall physics,” in *Recent Advances in Graphene Research*, P. Nayak, ed., ch. 1, pp. 3–29, INTECH, 2016.
- [30] G. Diankov, C.-T. Liang, F. Amet, P. Gallagher, M. Lee, A. J. Bestwick, K. Tharratt, W. Coniglio, J. Jaroszynski, K. Watanabe, T. Taniguchi, and D. Goldhaber-Gordon, “Robust fractional quantum hall effect in the $n=2$ Landau level in bilayer graphene,” *Nature Comm.* **7**, p. 13908, 2016.
- [31] D. C. Tsui, H. L. Störmer, and A. C. Gossard, “Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit,” *Phys. Rev. Lett.* **48**, p. 1559, 1982.
- [32] R. B. Laughlin, “Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations,” *Phys. Rev. Lett.* **50**, p. 1395, 1983.
- [33] W. Pan, H. L. Störmer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, “Fractional quantum Hall effect of composite fermions,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, p. 016801, 2003.
- [34] F. Amet, A. J. Bestwick, J. R. Williams, L. Balicas, K. Watanabe, T. Taniguchi, and D. Goldhaber-Gordon, “Composite fermions and broken symmetries in graphene,” *Nat. Commun.* **6**(6838), 2015.
- [35] D. K. Ki, V. I. Falko, D. A. Abanin, and A. Morpurgo, “Observation of even denominator fractional quantum Hall effect in suspended bilayer graphene,” *Nano Lett.* **14**, p. 2135, 2014.
- [36] F. D. M. Haldane, “Model of quantum Hall effect without Landau levels: condensed matter realization of the ‘parity anomaly’,” *Phys. Rev. Lett.* **61**, p. 2015, 1988.
- [37] D. N. Sheng, Z.-C. Gu, K. Sun, and L. Sheng, “Fractional quantum Hall effect in the absence of Landau levels,” *Nature Comm.* **2**, p. 389, 2011.
- [38] T. Liu, C. Repellin, B. A. Bernevig, and N. Regnault, “Fractional Chern insulators beyond Laughlin states,” *Phys. Rev. B* **87**, p. 205136, 2013.
- [39] J. K. Jain, “Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, p. 199, 1989.
- [40] J. K. Jain, *Composite Fermions*, Cambridge UP, Cambridge, 2007.
- [41] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in quantum theory,” *Phys. Rev.* **115**, p. 485, 1959.
- [42] J. P. Eisenstein, M. P. Lilly, K. B. Cooper, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, “New physics in high Landau levels,” *Physica E* **6**, p. 29, 2000.

- [43] W. Pan, K. W. Baldwin, K. W. West, L. N. Pfeiffer, and D. C. Tsui, “Fractional quantum hall effect at landau level filling $4/11$,” *Phys. Rev. B* **91**, p. 041301(R), 2015.
- [44] N. Samkharadze, I. Arnold, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and G. A. Csáthy, “Observation of incompressibility at $\nu = 4/11$ and $\nu = 5/13$,” *Phys. Rev. B* **91**, p. 081109, 2015.
- [45] A. Kumar, G. A. Csáthy, M. J. Manfra, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, “Nonconventional odd-denominator fractional quantum hall states in the second landau level,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, p. 246808, 2010.
- [46] C. R. Dean, A. F. Young, P. Cadden-Zimansky, L. Wang, H. Ren, K. Watanabe, T. Taniguchi, P. Kim, J. Hone, and K. L. Shepard, “Multicomponent fractional quantum Hall effect in graphene,” *Nature Physics* **7**, p. 693, 2011.
- [47] B. E. Feldman, B. Krauss, J. H. Smet, and A. Yacoby, “Unconventional sequence of fractional quantum Hall states in suspended graphene,” *Science* **337**, p. 1196, 2012.
- [48] A. Kou, B. E. Feldman, A. J. Levin, B. I. Halperin, K. Watanabe, T. Taniguchi, and A. Yacoby, “Electron-hole asymmetric integer and fractional quantum hall effect in bilayer graphene,” *Science* **345**(6192), pp. 55–57, 2014.
- [49] F. D. M. Haldane, “Fractional quantization of the Hall effect: a hierarchy of incompressible quantum fluid states,” *Phys. Rev. Lett.* **51**, p. 605, 1983.
- [50] B. I. Halperin, “Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized Hall states,” *Phys. Rev. Lett.* **52**, p. 1583, 1984.
- [51] B. I. Halperin, “Theory of the quantized Hall conductance,” *Helv. Phys. Acta* **56**, p. 75, 1983.
- [52] R. E. Prange and S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer Verlag, New York, 1990.
- [53] P. Sitko, K.-S. Yi, and J. J. Quinn, “Composite fermion hierarchy: Condensed states of composite fermion excitations,” *Phys. Rev. B* **56**, pp. 12417–12421, 1997.
- [54] S. Das Sarma and A. Pinczuk, *Perspectives in Quantum Hall Effects: Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures*, Wiley, New York, 1997.
- [55] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990.
- [56] R. L. Willett, “The quantum Hall effect at $5/2$ filling factor,” *Rep. Prog. Phys.* **76**, p. 076501, 2013.
- [57] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton UP, Princeton, 1974.
- [58] E. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [59] T. Einarsson, “Fractional statistics on a torus,” *Phys. Rev. Lett.* **64**, p. 1995, 1990.
- [60] Y. S. Wu, “General theory for quantum statistics in two dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **52**, p. 2103, 1984.
- [61] J. M. Leinaas and J. Myrheim, “On the theory of identical particles,” *Nuovo Cimento* **37B**, p. 1, 1977.
- [62] E. C. G. Sudarshan, T. D. Imbo, and T. R. Govindarajan, “Configuration space topology and quantum internal symmetries,” *Phys. Lett. B* **213**, p. 471, 1988.
- [63] T. D. Imbo, C. S. Imbo, and C. S. Sudarshan, “Identical particles, exotic statistics and braid groups,” *Phys. Lett. B* **234**, p. 103, 1990.
- [64] M. G. Laidlaw and C. M. DeWitt, “Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles,” *Phys. Rev. D* **3**, p. 1375, 1971.
- [65] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [66] M. Chaichian and A. Demichev, *Path Integrals in Physics, Volume I and II*, IOP Publishing Ltd, Bristol; Philadelphia, 2001.
- [67] M. Azbel, “Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field,” *J. Exp. Theor. Phys.* **19**, p. 634, 1964.
- [68] D. R. Hofstadter, “Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields,” *Phys. Rev. B* **14**, p. 2239, 1976.
- [69] O. Ciftja and C. Wexler, “Monte Carlo simulation method for Laughlin-like states in a disk geometry,” *Phys. Rev. B* **67**, p. 075304, 2003.
- [70] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. M. Teller, and E. Teller, “Equation of state calculations by fast computing machines,” *J. Chem. Phys.* **21**, p. 1087, 1953.

- [71] W. Pan, K. W. Baldwin, K. W. West, L. N. Pfeiffer, and D. C. Tsui, “Fractional quantum Hall effect at Landau level filling $4/11$,” *Phys. Rev. B* **91**, p. 041301(R), 2015.
- [72] S. Mukherjee, S. S. Mandal, Y. Wu, A. Wójs, and J. K. Jain, “Enigmatic $4/11$ state: A prototype for unconventional fractional quantum hall effect,” *Phys. Rev. Lett.* **112**, p. 016801, 2014.
- [73] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover Publ. Inc., Dover, 1975.
- [74] X. Du, I. Skachko, F. Duerr, A. Luican, and E. Y. Andrei, “Fractional quantum Hall effect and insulating phase of Dirac electrons in graphene,” *Nature* **462**, p. 192, 2009.
- [75] L. Romasanta, M. Hernandez, M. Lopez-Manchado, and R. Verdejo, “Functionalised graphene sheets as effective high dielectric constant fillers,” *Nanoscale Research Letters* **6**, p. 508, 2011.
- [76] M. O. Goerbig, “Electronic properties of graphene in a strong magnetic field,” *Rev. Mod. Phys.* **83**, p. 1193, 2011.
- [77] E. McCann and M. Koshino, “The electronic properties of bilayer graphene,” *Rep. Prog. Phys.* **76**, p. 056503, 2013.
- [78] B. E. Feldman, A. J. Levin, B. Krauss, D. A. Abanin, B. I. Halperin, J. H. Smet, and A. Yacoby, “Fractional quantum Hall phase transitions and four-flux states in graphene,” *Phys. Rev. Lett.* **111**, p. 076802, 2013.
- [79] P. Maher, L. Wang, Y. Gao, C. Forsythe, T. Taniguchi, L. Watanabe, D. Abanin, Z. Papić, P. Cadden-Zimansk, J. Hone, P. Kim, and C. R. Dean, “Tunable fractional quantum Hall phases in bilayer graphene,” *Science* **345**, p. 61, 2014.
- [80] M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Colloquium: Topological insulators,” *Rev. Mod. Phys.* **82**(3045), 2010.
- [81] R. D. Wiersma, J. G. S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H. P. Tranitz, and W. Wegscheider, “Activated transport in the separate layers that form the $\nu_T = 1$ exciton condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **93**, p. 266805, 2004.
- [82] J. I. A. Li, T. Taniguchi, K. Watanabe, J. Hone, and C. R. Dean, “Excitonic superfluid phase in double bilayer graphene,” *Nat. Phys.* **13**, p. 751, 2017.
- [83] X. Liu, K. Watanabe, T. Taniguchi, B. I. Halperin, and P. Kim, “Quantum Hall drag of exciton condensate in graphene,” *Nat. Phys.* **13**, p. 746, 2017.
- [84] J. Eisenstein, “Evidence for spontaneous interlayer phase coherence in a bilayer quantum Hall exciton condensate,” *Sol. St. Comm.* **127**, p. 123, 2003.
- [85] H. A. Fertig, “Energy spectrum of a layered system in a strong magnetic field,” *Phys. Rev. B* **40**, p. 1087, 1989.
- [86] L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinskii, “Contribution to the theory of the Mott exciton in a strong magnetic field,” *Sov. Phys. JETP* **26**, p. 449, 1968.
- [87] E. Tutuc and M. Shayegan, “Charge neutral counterflow transport at filling factor 1 in GaAs hole bilayers,” *Sol. St. Comm.* **144**, p. 405, 2007.
- [88] Y. W. Suen, L. W. Engel, M. B. Santos, M. Shayegan, and D. C. Tsui, “Observation of a $\nu=1/2$ fractional quantum hall state in a double-layer electron system,” *Phys. Rev. Lett.* **68**, p. 1379, 1992.
- [89] P. Eisenstein, G. S. Boebinger, L. N. Pfeiffer, K. W. West, , and S. He, “New fractional quantum Hall state in double-layer two-dimensional electron systems,” *Phys. Rev. Lett.* **68**, p. 1383, 1992.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych (artystycznych).

• Publikacje po doktoracie dotyczące tematu osiągnięcia niewłączone do osiągnięcia

1. **J. Jacak**, P. Łydźba, and L. Jacak, *Homotopy approach to fractional quantum Hall effect*. Appl. Math. **6**, p. 345, 2015.
2. **J. Jacak** and L. Jacak, *The triggering role of carrier mobility in the fractional quantum Hall effect formation—an evidence in graphene*. J. Mod. Phys. **4**, p. 1591, 2013. invited to Special Issue: Topological Insulators and Low Dimensional Quantum Physics.
3. **J. Jacak**, P. Łydźba, and L. Jacak, *Fractional quantum Hall effect revisited*. Physica B **475**, p. 122, 2015.
4. **J. Jacak**, *Bilayer graphene as the material for study of the unconventional fractional quantum Hall effect*. chapter in Graphene Materials: Structure, Properties and Modifications, G. Z. Kyzas, ed., ch. 3, pp. 49–76, INTECH, 2017.
5. **J. Jacak**, R. Gonczarek, L. Jacak, and I. Józwiak, *Explanation of composite fermion structure in fractional quantum Hall systems*. Int. J. Mod. Phys. B **26**, pp. 1230011–1–60, 2012.
6. P. Łydźba and **J. Jacak**, *Ultra-quantum 2d materials: Graphene, bilayer graphene, and other Hall systems—new non-local quantum theory of Hall physics*. chapter in Recent Advances in Graphene Research, P. Nayak, ed., ch. 1, pp. 3–29, INTECH, 2016.
7. **J. Jacak**, 2017, *Confinement and fractional charge of quarks from braid group approach to holographic principle*, arXiv:1704.06560.
8. **J. Jacak**, L. Jacak, 2015, *Hierarchy of fillings for FQHE in monolayer and in bilayer graphene: Explanation of $\nu = -\frac{1}{2}$ fractional quantum Hall state in bilayer graphene*, arXiv:1503.08783.
9. **J. Jacak**, L. Jacak, 2014, *Explanation of the odd structure of fractional Hall states in higher Landau levels and filling ratios with even denominators*, arXiv:1405.4348.
10. **J. Jacak**, L. Jacak, 2014, *Explanation of fractional hierarchy observed experimentally in higher Landau levels*, arXiv:1405.2598.
11. **J. Jacak**, L. Jacak, 2012, *Confirmation in graphene of wave packet multilooped dynamics related to fractional quantum Hall state*, arXiv:1201.4452.
12. **J. Jacak**, L. Jacak, 2012, *The triggering role of carrier mobility in the fractional quantum Hall effect-evidence in graphene*, arXiv:1201.4451.

• Publikacje po doktoracie nie dotyczące tematu osiągnięcia

13. M. Jacak, I. Józwiak, **J. Jacak**, J. Gruber, W. Jacak, 2013, *Wprowadzenie do kryptografii kwantowej: implementacja protokołów kryptografii kwantowej na systemach niesplątanych fotonów (system Clavis II) i splątanych fotonów (system EPR S405 Quelle)*, ISBN: 978-83-7493-746-7, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, monografia, 1-200.
14. M. Jacak, **J. Jacak**, I. Józwiak, P. Józwiak, 2016, *Quantum cryptography: Theoretical protocols for quantum key distribution and tests of selected commercial QKD systems in commercial fiber networks*, International Journal of Quantum Information **14**, 1630002-1-73.
15. M. Jacak, D. Melniczuk, **J. Jacak**, A. Janutka, I. Józwiak, J. Gruber, P. Józwiak, 2016, *Quantum key distribution security constraints caused by controlled quality of dark channel for non-entangled and entangled photon quantum cryptography setups*, Optical and Quantum Electronics **48**, 363-1-16.

16. M. Jacak, D. Melniczuk, **J. Jacak**, I. Jóźwiak, J. Gruber, P. Jóźwiak, 2015, *Stability assessment of QKD procedures in commercial quantum cryptography systems versus quality of dark channel*, International Journal of Quantum Information **13**, 1550064-1-12.
 17. E. Zielony, E. Płaczek-Popko, A. Henrykowski, Z. Gumienny, P. Kamyczek, **J. Jacak**, P. Nowakowski, G. Karczewski, 2012, *Laser irradiation effects on the CdTe/ZnTe quantum dot structure studied by Raman and AFM spectroscopy*, International Journal of Applied Physics **112**, 063520-1-7.
- Publikacje przyjęte – w druku (na dzień 31.07.2018)
 18. **J. Jacak**, 2018, *Topological approach to Fractional Quantum Hall Effect in monolayer and bilayer graphene*, Handbook on the Graphene Materials (Advanced Materials Book Series), VBRI Press, Wiley, zaproszony rozdział.
 19. P. Łydzba, **J. Jacak**, 2018, *Many-body wave functions for correlated systems in magnetic fields: Monte Carlo simulations in the lowest Landau level*, Journal of Physics: Cond. Matter,
 20. **J. Jacak**, W. Jacak, 2018, *Plasmon-induced enhancement of efficiency of solar cells modified by metallic nano-particles: material dependence*, Journal of Applied Physics.
 - Patenty zgłoszone
 21. Patent krajowy + PCT, **J. Jacak**, W. Jacak, W. Donderowicz, L. Jacak, *Entanglement Quantum Random Number Generator with public randomness certification*, 2017/2018
 22. Patent krajowy + PCT, **J. Jacak**, W. Jacak, *The One-Qubit Pad (OQP) for entanglement encryption of quantum information*, 2017/2018
 23. Patent krajowy, W. Jacak, **J. Jacak**, W. Donderowicz, L. Jacak, *Kwantowa Splątaniowa Waluta - Quantum Entanglement Currency (QEC)*, 2017
 24. Patent krajowy, M. Jacak, **J. Jacak**, W. Jacak, W. Donderowicz, L. Jacak, *BANQOMAT - zabezpieczony kryptografią kwantową bankomat*, 2017
 25. Patent krajowy, **J. Jacak**, W. Jacak, W. Donderowicz, L. Jacak, *Kwantowy Splątaniowy Podpis Cyfrowy - Quantum Entanglement Digital Signature (QEDS)*, 2017

Publikacje J. Jacaka po doktoracie niewłączone do przedstawianego osiągnięcia naukowego to 12 publikacji z tematu osiągnięcia (niewłączone do osiągnięcia), 5 publikacji z innej dziedziny (informatyki kwantowej) a także 5 zgłoszeń patentowych (z informatyki kwantowej) a także 3 publikacje w druku. Publikacje z tematu osiągnięcia niewłączone do osiągnięcia to prace uzupełniające treści przedstawione w 15-tu publikacjach osiągnięcia. Wg wykazu jak wyżej prace 2,4,6 to przeglądowe rozdziały (w tym zaproszone) do książek, w których przedstawiono zasadnicze aspekty nowego topologicznego sformułowania teorii FQHE i zastosowań głównie do grafenu. Prace 1,3,5 to publikacje w czasopismach także o charakterze przeglądowym lub streszczającym w stosunku do publikacji autora przedstawionych w osiągnięciu. W szczególności obszerna (60 stron) praca 5 jest skorelowana z monografią World Scientific (J. Jacak, R. Gonczarek, L. Jacak, and I. Jóźwiak, Application of Braid Groups in 2D Hall System Physics: Composite Fermion Structure, World Scientific, Singapore, 2012) ale zawiera pewne nowe elementy rozwinięte później w kolejnych pracach autora. Prace 1 – 12 zawierają też rozmaite drobniejsze wyniki nie opublikowane w cyklu publikacji przedstawionym jako osiągnięcie naukowe, i można je potraktować jako uzupełnienie (co po części zostało zilustrowane w opisie osiągnięcia). Prace 7 – 12 to publikacje w arXiv, w znacznej części dotyczące wyników później publikowanych w czasopismach. Wyjątek stanowi praca 7 dotycząca propozycji nowatorskiego zastosowania metod warkoczowych

do oryginalnej koncepcji kwarków (ich *confinementu* i ułamkowych ładunków) w modelu warkoczowym w ramach teorii holograficznej (anyony na sferze holograficznej – wysłana do publikacji w czasopiśmie).

Następna grupa prac autora dotyczy innej rozwijanej przez niego tematyki z zakresu informatyki kwantowej – kwantowej kryptografii. Ta grupa prac to: 13 – monografia współautorska z zakresu kryptografii kwantowej i kwantowej dystrybucji klucza publicznego, oraz 3 publikacje (14 – 16 wg zestawienia jak wyżej) z zakresu QKD (*quantum key distribution*) w systemach kryptografii kwantowej bezsplątaniowej i splątaniowej. Prace te dotyczą współpracy autora z grupą z *Austrian Institute of Technology* (*spin-off* Uniwersytetu w Wiedniu, grupa prof. Zeilingera) w zakresie kryptografii kwantowej na splątanych fotonach i firmą *idQuantique* z Genewy (*spin-off* Uniwersytetu w Genewie, grupa prof. Gisin) z zakresu kryptografii na niesplątanych fotonach i zastosowania obu systemów do metropolitalnej sieci (były prowadzone przy udziale J. Jacaka prace wdrożeniowe w światłowodowej sieci wrocławskiej i testy laboratoryjne różnych wersji kwantowych kanałów, a także rozwój własnej konstrukcji systemu QKD). Z tym obszarem wiąże się też udział autora w 5-ciu zgłoszeniach patentowych (21 – 25 wg zestawienia jak wyżej) dotyczących zastosowań kryptografii kwantowej i nowych koncepcji kwantowego generatora liczb losowych. Złożone wnioski patentowe 21-25 (2017/2018) są wynikiem współpracy J. Jacaka przy realizacji projektów z zakresu informatyki kwantowej (głównie z obszaru informatycznego bezpieczeństwa i kwantowej kryptografii) z zespołem z Katedry Technologii Kwantowych PWr.

Praca 17 dotyczy spektroskopii ramanowskiej – J. Jacak odbył kurs z zakresu spektrometrii ramanowskiej (spektrometr T64000 Horiba-J-Y) i brał udział w związanej eksperymentalnej pracy badawczej, czego rezultatem była publikacja 17.

Dołączone do zestawienia są też 3 publikacje obecnie (na dzień 31.07.2018) w druku. Praca 18 to zaproszony rozdział do specjalistycznej monografii Wiley'a z zakresu topologicznego wyjaśnienia FQHE w grafenie. Praca 19 to wykonane z doktorantką p. mgr. P. Łydzką symulacje numeryczne Metropolis Monte Carlo ilustrujące rozwiniętą w osiągnięciu teorie FQHE w LLL konwencjonalnego układu Halla (GaAs). Praca 20 dotyczy zastosowań plazmoniki dla zwiększenia efektywności baterii słonecznych metalicznie modyfikowanych w nano skali – praca zrealizowana w ramach projektu europejskiego COST MultiscaleSolar, w którym zespół z PWr z udziałem J. Jacaka uczestniczy (tematyka plazmoniki była szerzej obecna we wcześniejszych pracach J. Jacaka w ramach współpracy z Uniw. w Odessie, prof. J. Krasnym i w Karlsruhe/Clausthal, prof. D. Schaadtem).

