



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Kraków dn. 8.11.2021r.

Recenzja pracy doktorskiej p. Bartosza Kuśmierz
pt. *Applications of symmetric functions theory to many-body effects in
fractional quantum Hall systems.*

Pan Bartosz Kuśmierz ukończył studia magisterskie z fizyki na Politechnice Wrocławskiej oraz licencjackie z matematyki na Uniwersytecie Wrocławskim. Doktorant ma bogaty dorobek z 10 pracami na temat kwantowego efektu Halla, dwoma pracami z zakresu ogólnej teorii względności oraz czterema na temat technologii rejestru w rozproszonych bazach danych. W czasie studiów doktoranckich Bartosz Kuśmierz odbył dwa staże u prof. G.J. Sreejitha w Indian Institute of Science Education and Research w Pune.

Praca została przygotowana pod opieką prof. Arkadiusza Wójca na Politechnice Wrocławskiej. Obiektem badań są stany elektronowe w warunkach ułamkowego kwantowego efektu Halla. Dla czynnika wypełnienia poniżej jedności energia kinetyczna jest równa we wszystkich niskoenergetycznych stanach a o funkcji falowej stanu podstawowego decyduje oddziaływanie kulombowskie. Warunki ułamkowego efektu Halla pozwalają na badania wielociałowych efektów oddziaływania nośników silnie skorelowanych w warunkach wyjątkowo czystych jak na fizykę ciała stałego. Tematyka, mimo że uprawiana od niemal czterdziestu lat, pozostaje otwarta. Rozwiązania, które udaje się znaleźć numerycznie metodą dokładnej diagonalizacji, mają zazwyczaj złożoną strukturę, której zrozumienie wymaga systematyzacji i wskazania prostszych, przybliżonych funkcji wielociałowych.

Praca napisana jest w języku angielskim. Dysertacja podzielona jest na dwie części. Pierwsza - zawiera omówienie problematyki ułamkowego kwantowego efektu Halla oraz teorii funkcji falowych i mieści się na 109 stronach z bibliografią. Część druga zawiera oryginalne wyniki badań doktorskich opublikowane w formie artykułów naukowych. Dla ułatwienia lektury autor w materiałach wstępnych zamieścił listę skrótów oraz wybranych oznaczeń oraz wyjaśnił konwencję oznaczeń macierzy oraz sumowań.

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
al. A. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
tel. +48 12 617 2951, +48 12 633 3740, fax +48 12 634 00 10

W części wstępnej autor omawia po kolei całkowity kwantowy efekt Halla, efekt ułamkowy oraz zastosowanie funkcji symetrycznych w teorii ułamkowego kwantowego efektu Halla. Doktorant opisuje znane funkcje falowe stosowane do wybranych współczynników wypełnienia: Laughlina dla wypełnień $1/(2r+1)$, funkcje Moora-Reada z pfaffianem dla wypełnienia 2.5, funkcje dla sekwencji Read-Rezayi dla wypełnienia $r/(r+2)$ oraz funkcje falowe w podejściu złożonych fermionów.

Doktorant opisuje narzędzia, którymi posługiwał się w badaniach, w tym sferę Haldane'a z monopolem magnetycznym w centrum, mapowanie współrzędnych kartezjańskich na współrzędne kątowe, pseudopotencjały Haldane'a oraz hamiltoniany rzutowe na nich zbudowane. Autor wprowadza pojęcia niezbędne do zdefiniowania funkcji symetrycznych, którymi się posługuje w analizie: podział (partition) liczby całkowitej, konwencje notacji i reprezentacje graficzne podziałów, operacje na podziałach, przestrzeń podziałów, jednomianowe funkcje symetryczne, zupełne wielomiany symetryczne. Następnie doktorant wprowadza wielomiany Jack'a indeksowane przez podział oraz parametr rzeczywisty. Autor wyjaśnia, że wielomiany Jacka są funkcjami własnymi operatora Laplace'a- Beltramiiego oraz podaje formuły rekurencyjne dla spełnione przez te wielomiany. Po wprowadzeniu tzw. fermionowych wielomiany Jacka autor wskazuje, że znane funkcje falowe dla wybranych współczynników wypełnienia są ich przypadkiem szczególnym. W dodatku do części pierwszej doktorant wskazuje procedury używane w rachunkach numerycznych.

Wstęp przygotowany jest bardzo starannie i klarownie. Ta część rozprawy poza wprowadzeniem do prac oryginalnych jest cenna sama w sobie i może służyć jako wsparcie dla badaczy wchodzących do tematyki funkcji falowych w efekcie Halla.

W części oryginalnej podanych jest 5 opublikowanych prac (2 w PRB, 3 w Acta Physica Polonica) oraz jeden manuskrypt wysłany do recenzji.

W pracy A1 [B. Kuśmierz, A. Wójs, PRB 97, 245125 (2018) *Emergence of Jack ground-states from two-body pseudopotentials in FQHE systems*] autorzy badają stany FQHE na sferze Haldane'a oraz adekwatność stanów Jacka do opisu stanu podstawowego. Wyznaczone metodą dokładnej diagonalizacji stany są używane do zbadania przekrywania funkcji falowej stanu podstawowego z funkcjami Jacka. Autorzy rozważają bezmasowe fermiony w grafenie

oraz masywne fermiony w arsenku galu. Do dokładnej diagonalizacji używany jest hamiltonian rozpięty na pseudopotencjałach. Autorzy badają w szczególności pseudopotencjały wygenerowane przez potencjał kulombowski na sferze oraz ogólną postać pseudopotencjałów sparametryzowanych przez względne momenty pędu pary elektronów $m=1, 3$ oraz 5 . Praca zawiera dyskusję przekrywania funkcji Jacka odpowiadających funkcjom Laughlina oraz stanom odpowiadających funkcji z pfaffianem oraz haffnianem oraz funkcji Read'a-Rezayiego dla różnych współczynników wypełnienia poziomów Landaua. Ważnym wynikiem pracy jest charakteryzacja stanów Jacka przez parametry dwuciałowych pseudopotencjałów oraz wskazanie odpowiadających im sekwencji pseudopotencjałów, generowanych przez krótkie, proste sekwencje wiodących wartości. Autorzy wskazali i sprawdzili prostą formułę optymalnych dwuciałowych pseudopotencjałów dla serii stanów Jacka generowanych przez $(k+1)$ -ciałowe odpychanie o krótkim zasięgu dla współczynników wypełnienia $k/(k+2)$.

Praca A2 [B. Kuśmierz, A. Wójs, G.J. Sreejith, PRB 99, 235141 (2019) *Mean-field approximations for short-range four-body interactions at $\nu=3/5$.*] bada redukcję hamiltonianu z oddziaływaniem czterociałowym do oddziaływań z mniejszą liczbą cząstek, w szczególności z oddziaływaniem dwuciałowym z wykorzystaniem trzech różnych przybliżeń średniego pola. Analizowane jest przypadek funkcji Jacka badanej w pracy poprzedniej, w którym funkcja falowa stanu podstawowego opisana jest stanem opisanym przez funkcję Read'a-Rezayi'ego. Praca poza przekrywaniem oraz funkcją korelacji par - jak poprzednia - bada niskoenergetyczne widmo dla układu na sferze Haldane'a. Autorzy wskazali, że oddziaływanie czterocząstkowe może zostać opisane z wykorzystaniem dwuciałowych pseudopotencjałów o tylko kilku niezerowych wartościach pozostających w związku potęgowym w funkcji względnego momentu pędu. Autorzy wskazują, że wybrana forma oddziaływania dwuciałowego opisuje optymalnie stan Read'a-Rezayi'ego.

Pokonferencyjna praca A3 [Acta Physica Polonica A 135 82 (2019) *Ground States of Quantum Hall Three-Body „Short-Range” Repulsion and Mean Field Approximation: Correlation function and Overlaps*] bada stany Moore'a-Read'a (MR) dla $\nu=1/2$ generowane przez krótkozasięgowe odpychanie oraz ich przybliżenie dwuciałowe wykorzystujące technikę redukcji przez metodę pola średniego. Funkcje korelacji par oraz gęstości cząstek w funkcji MR oraz pola średniego są podobne, a ich przekrywanie pozostaje na poziomie 0.89

lub wyższym dla różnych liczb elektronów na sferze Haldane'a i odpowiednich strumieniach pola magnetycznego generujących wypełnienie $\frac{1}{2}$. Niemniej jednak, przekrywania tych funkcji ze stanem wygenerowanym przez oddziaływanie kulombowskie są niższe, wartości ok. 0.3 oraz 0.48 dla stanów zredukowanych techniką pola średniego oraz dla funkcji Moore'a-Read'a, odpowiednio.

Pokonferencyjna praca A4 [Acta Physica Polonica A, *Quantum Hall State $\nu=1/3$ and Antilexicographics Order of Partitions*] dotyczy poszukiwania podziału definiującego podprzestrzeń Hilberta, w której mieściłby się stan podstawowy. Zaproponowana jest metoda wskazywania podziału dominującego w sensie porównywania podziałów w odwrotnym porządku leksykograficznym. Procedura ma na celu ograniczenie rozmiaru przestrzeni, w której należy prowadzić poszukiwania do takiej, którą można przeglądać w skończonym czasie. Dla stanów z najniższego poziomu Landaua procedura wskazuje, że odpowiedni podział dla N elektronów jest ciągiem N liczb całkowitych od $3(N-1)$ do 0 , co dokładnie odpowiada funkcji Jacka, odtwarzającej z kolei funkcję Laughlina. Dla stanów z obsadzeniem drugiego poziomu Landaua takiej sekwencji nie udaje się znaleźć i dominujące podziały nie układają się w dający się opisać w prosty sposób schemat. Ponadto w bazie stanów trudno jest wskazać, te które można by wykluczyć przed zamknięciem rozmiaru podprzestrzeni wektorowej dla danego N .

Praca A5 to nieopublikowany dotychczas manuskrypt (B. Kuśmierz, G.J. Sreejith, *Cluster-cluster correlations beyond the Laughlin state*), który analizuje położenie zer wieloelektronowej funkcji falowej, a w szczególności $\gamma_{p,s}$, tj. liczbę zer z punktu widzenia klastra p cząstek w klastrze s innych cząstek. Badania przeprowadzono dla pseudopotencjałów modelowych oraz wariacyjnie dla funkcji odbiegających od stanów Laughlina: z w pełni wypełnionym najniższym poziomem Landaua oraz jednym złożonym fermionem w drugim poziomie Landaua. Stany charakteryzowane są przez podział zer (root partition) definiujący odpowiednie funkcje symetryczne. Praca bada odrywanie się zer od cząstek dla potencjału kulombowskiego oraz wskazuje, że liczba zer $\gamma_{p,s}$ nie jest w sposób jednoznaczny wyznaczona przez partycję zerową, gdyż dla tego samego stanu liczba zer zależy od promienia lokalizacji klastrów p oraz s .

Praca A6 z *Acta Physica Polonica, Commutators of Jastrow Factors and Angular Momentum Operators z 2017 roku* ma charakter techniczny i dotyczy operatorów drabinkowych: podnoszących i obniżających

moment pędu oraz operatora mnożenia przez czynnik Jastrowa, oraz ich relacji przemienności. Operatory $L+$ i $L-$ są używane w literaturze do wyznaczenia warunków koniecznych dla funkcji falowych Jacka, które mogą być dobrym przybliżeniem stanu podstawowego w FQHE.

Doktorant opanował istniejący stan wiedzy, co nie jest zadaniem łatwym ze względu na stopień złożoności problemu oraz istniejący stan wiedzy i wniósł do oryginalny wkład do analizy stanów z wykorzystaniem funkcji symetrycznych. Praca zawiera wyniki cenne dla analizy i systematyzacji stanów w zakresie kwantowego efektu Halla, ze szczególnym uwzględnieniem analizy stanów Jacka z wykorzystaniem hamiltonianów zbudowanych na pseudopotencjałach, ogólnych krótkozasięgowych oddziaływań czterocząstkowych dla wypełnienia $3/5$ oraz związku między podziałami zer (root partitions) a stanami elektronowymi w badanych warunkach.

Według dołączonego do dokumentacji oświadczenia, Doktorant wniósł wiodący wkład do prac wybranych do rozprawy. Poza wykonywaniem całości lub znacznej części obliczeń oraz przygotowaniem ilustracji, autor rozprawy wniósł pomysł problemu badawczego (A1, A4, A6), redagował teksty publikacji, współuczestniczył w przygotowaniu dyskusji.

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska Pana Bartosza Kuśmiera spełnia z naddatkiem wymagania stawiane pracom doktorskim określonym w Ustawie z dnia 14 marca 2003 o stopniach naukowych i tytule naukowym. Wnioskuje o dopuszczenie rozprawy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



