Ciekawe zadania z mechaniki, grawitacji, drgań, fal i termodynamiki z moimi rozwiązaniami.

Radzę najpierw spróbować rozwiązać dane zadanie samemu a dopiero później zajrzeć do mojego rozwiązania.

Zadanie 1

Ciało rzucono pionowo do góry z prędkością początkową v_o=20m/s. Znaleźć odstęp czasu między chwilami, kiedy ciało znajdowało się na połowie maksymalnej wysokości. Zaniedbać opór powietrza. (g=9,81m/s^2)

Rozwiązanie:
Równanie ruchu ciała wzdłuż pionowej osi y skierowanej ku górze i mającej miejsce zerowe w miejscu wyrzutu:

$$y = v_o t - \frac{1}{2} g t^2. \qquad (1)$$

Znajdźmy maksymalną wysokość ciała wstawiając do równania (1) czas wznoszenia się ciała t_{wz} odpowiadający zerowej prędkości.

$$0 = v(t_{wz}) = v_o - g t_{wz}$$

więc: $t_{wz} = \frac{v_o}{g}$,

czyli:

$$H_{max} = \frac{v_o^2}{2g}.$$

Wracamy do równania (1) i wstawiamy za y połowę maksymalnej wysokości:

$$\frac{v_o^2}{4g} = \frac{H_{max}}{2} = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

To równanie ma dwa rozwiązania. Jedno odpowiada wznoszeniu się ciała, a drugie opadaniu. Ich różnica wynosi:

$$\Delta t = \sqrt{2}\frac{v_o}{g} = 2{,}88\, m/s$$

J.B.

Zadanie 2

Z wieży o wysokości H=100 m zaczęło spadać swobodnie ciało. W chwili o Δt=1s później rzucono do góry z prędkością v_o =50 m/s drugie ciało. Na jakiej wysokości i po jakim czasie, licząc od chwili rozpoczęcia ruchu pierwszego ciała, oba ciała spotkają się? (przyjąć g=10m/s^2)

Rozwiązanie:
Równania ruchu ciała spadającego swobodnie oraz rzuconego do góry tworzą układ równań:

$$\mathit{dla\ ciała\ spadającego\ swobodnie\ z\ wysokości\ H}: \qquad y(t) = H - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\mathit{dla\ ciała\ rzuconego\ do\ góry}: \qquad y(t) = v_o \cdot (t - \Delta t) - \frac{1}{2} g \cdot (t - \Delta t)^2$$

Z tego układu równań wynika, że ciała spotkają się na wysokości h = 66,6 m, w chwili t = 2,58s po rozpoczęciu ruchu pierwszego ciała.

J.B.

Zadanie 3

Sternik o masie m=100 kg stoi na dziobie nieruchomej, niezacumowanej żaglówki o masie M=500 kg i długości d=6 m. Rufa (tył żaglówki) styka się z pomostem. O ile żaglówka odpłynie od pomostu, jeżeli sternik przejdzie na rufę?

Rozwiązanie

Początkowo żaglówka oraz sternik spoczywają, więc środek masy układu złożonego z obu ciał również spoczywa. Jeżeli sternik zaczął się przemieszczać, to było to wynikiem działania jedynie sił wewnętrznych działających między ciałami należącymi do układu. Więc skoro nie ma sił zewnętrznych działających na układ to całkowity pęd układu nie może ulec zmianie, czyli środek masy całego układu dalej będzie spoczywał i to zarówno, gdy sternik idzie w kierunku rufy, jak i wtedy gdy już się na niej zatrzyma. Wprowadźmy oś x i załóżmy, że zero na tej osi odpowiada końcowi pomostu, z którym początkowo styka się rufa, oraz że żaglówka może się przemieszczać w kierunku dodatnim tej osi.

Współrzędna środka masy układu, gdy sternik stoi na dziobie może być wyrażona wzorem:

$$x_{śr} = \frac{Mx_{śr,ż} + md}{M+m} \ ,$$

gdzie: $x_{śr,ż}$ - współrzędna środka masy samej żaglówki.

Natomiast, współrzędna środka masy układu, gdy sternik zatrzyma się na rufie, a żaglówka odpłynie od pomostu na odległość Δx może być zapisana wzorem:

$$x_{śr} = \frac{M\left(x_{śr,ż} + \Delta x\right) + m\Delta x}{M+m} \ .$$

Zatem

$$\frac{Mx_{śr,ż} + md}{M+m} = \frac{M\left(x_{śr,ż} + \Delta x\right) + m\Delta x}{M+m} \ ,$$

a stąd

$$\Delta x = \frac{md}{M+m} = 1\ m$$

J.B.

Zadanie 4

Łyżwiarz o masie M=60 kg, stojąc na łyżwach na lodzie , rzuca w kierunku poziomym kamień o masie m = 5 kg z prędkością v_k = 6 m/s. Obliczyć, na jaką odległość przemieści się łyżwiarz, jeśli współczynnik tarcia o lód wynosi f = 0,02.

Rozwiązanie

Z zasady zachowania pędu układu:

$$\vec{p}_{przed} = \vec{p}_{po}$$ (chodzi o pęd układu "przed" rzutem i tuż "po" rzucie)

Pęd przed rzutem $\vec{p}_{przed} = 0$, a tuż po rzucie $\vec{p}_{po} = \vec{p}_ł + \vec{p}_k$, gdzie $\vec{p}_ł$ -pęd łyżwiarza i $\vec{p}_k$ - pęd kamienia tuż po rzucie. Zatem:

$$\vec{0} = \vec{p}_ł + \vec{p}_k$$

Po przyjęciu kierunku pędu łyżwiarza za dodatni i opuszczeniu symboli wektorów mamy:

$$0 = Mv_{o,ł} - mv_k$$

skąd otrzymamy prędkość początkową łyżwiarza tuż po wyrzuceniu kamienia:

$$v_{o,ł} = \frac{mv_k}{M}.$$

Dzięki tej prędkości początkowej i wskutek tarcia łyżwiarz przemieści się na odległość:

$$s = v_{o,ł} \cdot t_k - \frac{1}{2} a \cdot t_k^2$$

gdzie t_k - czas ruchu łyżwiarza. Przyspieszenie **a** wynika z działania siły tarcia T:

$$a = \frac{T}{m} = \frac{fmg}{m} = fg\ .$$

Czas potrzebny do obliczenia przemieszczenia **s** należy wyznaczyć z warunku zerowania się prędkości końcowej łyżwiarza:

$$0 = v_ł(t_k) = v_{o,ł} - a \cdot t_k$$

Z ostatnich czterech równań otrzymamy wzór na przemieszczenie się łyżwiarza:

$$s = \frac{m^2 v_k^2}{2fM^2 g} = 0{,}64\ m.$$

J.B.

Zadanie 5

Łyżwiarz mając rozchylone ręce ma moment bezwładności I_1 i obraca się bez tarcia wokół własnej osi z prędkością kątową ω_1. Następnie łyżwiarz przybliża ręce do siebie, dzięki czemu uzyskuje moment bezwładności I_2 (mniejszy od I_1). Czy energia kinetyczna łyżwiarza wzrośnie? Jeżeli tak, to o ile? Wskaż źródło tego ewentualnego wzrostu energii kinetycznej.

Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu mamy:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \qquad \text{stąd:} \qquad \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2}.$$

Zmiana energii kinetycznej:

$$E_{k,2} - E_{k,1} = \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{I_2\left(\frac{I_1\omega_1}{I_2}\right)^2}{2} - \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{I_1\omega_1^2}{2}\left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right) > 0$$

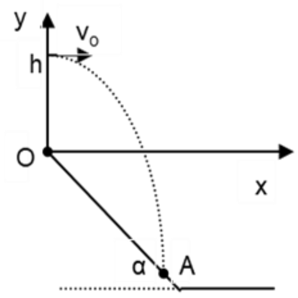
Ostatnia nierówność jest spełniona bo $I_1 > I_2$.

Ten wzrost energii kinetycznej jest spowodowany pracą sił mięśni łyżwiarza, a praca ta mogła być wykonana dzięki energii uzyskanej w wyniku metabolizmu zachodzącego w organizmie człowieka.

J.B.

Zadanie 6

Na szczycie góry rośnie jabłoń o wysokości h=5m (rys). W pewnym momencie chłopiec siedzący na czubku drzewa wyrzuca ogryzek nadając mu poziomą prędkość v_o = 10 m/s. Jak daleko od szczytu góry, licząc wzdłuż zbocza, upadnie ogryzek. Zbocze nachylone jest pod kątem α=45^o . Przyjmij g=10m/s^2.



Rozwiązanie:
W układzie współrzędnych XY równania ruchu rzuconego ciała mają postać:

$x = v_o t$ (1)

$y = h - \frac{1}{2}gt^2$ (2)

Po wyeliminowaniu z tego układu równań czasu otrzymamy równanie toru w postaci:

$$y = h - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_o^2} \qquad (3)$$

Natomiast równanie zbocza ma postać:

$$y = -x \qquad (4)$$

Współrzędne punktu A można obliczyć znajdując miejsce przecięcia się linii opisanych równaniami 3 i 4, czyli rozwiązując ten układ równań.
Współrzędne tego punktu wynoszą:
x_A = 24,1 m
y_A = -24,1 m

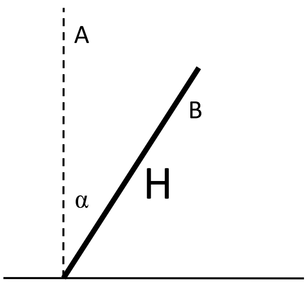
Zatem szukana odległość to długość odcinka $|\overline{AB}| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 =} \ 34{,}1 \ m.$

J.B.

Zadanie 8

Wysoki komin przewraca się z powodu pęknięcia u podstawy. Uznaj komin za cienki pręt o długości H i oznacz kąt utworzony przez komin z pionem jako α. Wyznacz: a) prędkość liniową końca komina w zależności od kąta przechylenia α (rys.), b) przyspieszenie radialne (dośrodkowe) górnego końca komina, c*) przyspieszenie styczne tego końca, wyrażając odpowiedzi przez dane wielkości oraz przyspieszenie ziemskie g. Wskazówka: Nie obliczaj momentu siły, lecz skorzystaj z zasady zachowania energii.

Rozwiązanie
a)



Z zasady zachowania energii mamy:

$$E_{cał,A} = E_{cał,B}$$
$$mg\frac{H}{2} = mg\frac{H}{2}\cos\alpha + \frac{I\omega^2}{2}$$

gdzie:
I - moment bezwładności komina względem dolnego końca

$$I = \frac{1}{3} m H^2$$

Po uwzględnieniu związku prędkości liniowej końca komina z jego prędkością kątową ($v = \omega H$) otrzymamy wyrażenie na szukaną prędkość liniową:

$$v = \sqrt{[3gH(1 - \cos\alpha)]}.$$

b) Przyspieszenie radialne (dośrodkowe) górnego końca komina:

$$a_r = \frac{v^2}{H} = 3g(1 - \cos\alpha).$$

c*) Przyspieszenie styczne górnego końca komina (trudniejsze – na egzaminie takiego podpunktu nie będzie):

$$a_{st} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dv}{d\alpha}\omega = \frac{dv}{d\alpha}\frac{v}{H}.$$

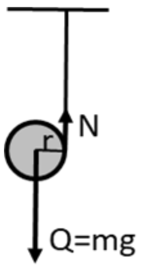
Uwzględniając zależność prędkości liniowej v od kąta α wyznaczoną w punkcie **a** otrzymamy:

$$a_{st} = \frac{3}{2} g \sin\alpha\ .$$

J.B.

Zadanie 9

Szpulkę w kształcie walca o promieniu *r* i masie m puszczono, trzymając nieruchomo za koniec odwijającej się nici. Z jakim przyspieszeniem *a* opada szpulka? Jaki jest naciąg N nici? (Moment bezwładności walca względem osi symetrii jest równy $I_o = \frac{1}{2} m r^2$. Oś obrotu szpulki jest pozioma).



Rozwiązanie

$ma = mg - N$ II zasada dynamiki Newtona dla ruchu postępowego środka masy,

$\varepsilon = \frac{N\,r}{I_o}$ II zasada dynamiki Newtona dla ruch obrotowego względem środka masy krążka,

$a = \varepsilon\, r$ związek między przyspieszeniem liniowym i kątowym.

Na rysunku nie zaznaczono siły naciągu nici, lecz siłę reakcji N równą co do wartości, ale o przeciwnym zwrocie, przyłożoną do szpulki.
Z tego układu równań otrzymujemy ogólny wzór na przyspieszenie oraz siłę naciągu nici:

$$a = g\frac{mr^2}{I_o + mr^2}$$
$$N = mg\frac{I_o}{I_o + mr^2}$$

Po uwzględnieniu wzoru na moment bezwładności szpuli względem osi symetrii $I_o = \frac{1}{2}mr^2$ otrzymamy końcowe rozwiązanie:

$$a = \frac{2}{3}g$$

$$N = \frac{1}{3}mg.$$

J.B.

Zadanie 13

Wykazać, że po zawieszeniu ciała na nieważkiej sprężynie wydłuży się ona ostatecznie (po ustaniu drgań) do długości odpowiadającej minimum energii potencjalnej układu złożonego z ciała i sprężyny.

Rozwiązanie

Jeżeli wydłużenie sprężyny pod wpływem ciężaru ciała oznaczymy przez x, to przyrost jej energii potencjalnej sprężystości wynosi:

$$E_{p,s} = \frac{1}{2}kx^2.$$

Grawitacyjną energię potencjalną ciała liczmy względem punktu, w którym znajdował się dolny koniec swobodnie wiszącej sprężyny przed zawieszeniem na niej ciała. W takiej sytuacji energia ta wiszącego ciała jest równa:

$$E_{p,gr} = -mgx.$$

Więc całkowita energia potencjalna układu wynosi:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - mgx.$$

Jest to parabola z ramionami skierowanymi do góry (k>0), a więc posiadająca minimum. Minimum energii potencjalnej odpowiada zerowaniu się pochodnej funkcji po wydłużeniu x, czyli:

$$0 = kx - mg.$$

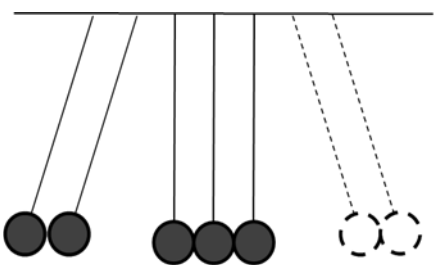
Jak należało się spodziewać, warunek ten oznacza równowagę sił działających na ciało, czyli siły grawitacyjnej i siły sprężystości.

Podsumujmy: Warunek równowagi sił działających na ciało jest równoważny znajdowaniu się całego układu w stanie minimalnej energii potencjalnej, a zatem w stanie równowagi trwałej.

J.B.

Zadanie 14

Kule o jednakowych masach są zawieszone na nitkach w taki sposób, że stykają się ze sobą tworząc długi szereg (rys). Wykazać, że jeżeli pewna liczba kul zostanie wychylona z położenia równowagi, to po zderzeniu z pozostałą częścią szeregu na drugim jego końcu odskoczy taka sama liczba kul, a pozostałe kule pozostaną nieruchome. Przyjąć, że zderzenia są doskonale sprężyste.



Rozwiązanie

Każda z n wychylonych o określony kąt kul tuż przed zderzeniem z wiszącymi pionowo kulami osiąga prędkość v_o, a zatem ich całkowita energia kinetyczna jest równa :

$$E_k = n\frac{mv_o^2}{2},$$

a ich całkowity pęd jest równy:

$$p = nmv_{o.}$$

Załóżmy, że w wyniku zderzenia z drugiej strony szeregu odskoczy k kul i uzyskały one prędkość v. Ich całkowita energia oraz całkowity pęd są równe:

$$E_k = k\frac{mv^2}{2},$$

$$p = kmv.$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii i pędu powinny być spełnione równania:

$$n\frac{mv_o^2}{2} = k\frac{mv^2}{2},$$

$$nmv_o = kmv.$$

Po podzieleniu stronami obu równań i pomnożeniu przez 2 otrzymujemy:

$$v_o = v.$$

Wracając do zasady zachowania pędu i wykorzystując ostatnią równość otrzymamy:

$$n = k.$$

J.B.

Zadanie 15

Perdido Regional Host, platforma wiertnicza w Zatoce Meksykańskiej, ma wysokość H=2348 m i jest obecnie (2013 r.) najwyższą konstrukcją wzniesioną przez człowieka. W oparciu o uproszczony wzór na energię potencjalną $E_p = mgh$ (gdzie g - przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi) obliczono pracę potrzebną do wyniesienia ostatniego elementu konstrukcyjnego platformy na najwyższą wysokość. Jaki błąd względny popełniono stosując ten wzór? (przyjmij promień Ziemi $R_Z = 6370\ km$)

Rozwiązanie

Błąd względny obliczymy ze wzoru:

$$\delta = \frac{W_p - W_{rz}}{W_{rz}},$$

gdzie:

W_{rz} - rzeczywista praca obliczona w oparciu o dokładny wzór na energię potencjalną.

$$W_{rz} = E_{p,koń} - E_{p,pocz} = -G\frac{Mm}{R_Z + H} - \left(-G\frac{Mm}{R_Z}\right) = GMmH\frac{1}{R_Z(R_Z + H)}\ ,$$

W_p - praca obliczona w oparciu o wzór przybliżony:

$$W_p = mgH.$$

Wiadomo, że na powierzchni Ziemi ciężar ciała można wyrazić na dwa sposoby, więc:

$$mg = G\frac{Mm}{R_Z^2}\ , \quad \text{czyli} \quad mgH = G\frac{Mm}{R_Z^2}H.$$

Zatem,

$$\delta = \frac{W_p - W_{rz}}{W_{rz}} = \frac{G\frac{Mm}{R_Z^2}H - GMmH\frac{1}{R_Z(R_Z + H)}}{GMmH\frac{1}{R_Z(R_Z + H)}} = \frac{H}{R_Z}$$

Po wstawieniu danych mamy:

$$\delta = 0{,}038\,\%$$

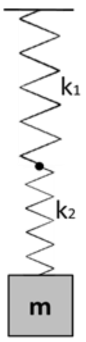
Zauważmy, że błąd ten jest dodatni, czyli praca przybliżona jest większa niż praca obliczona ze wzoru dokładnego i błąd ten rośnie liniowo wraz ze wzrostem wysokości.

J.B.

Drgania

Zadanie 16

Wyznaczyć okres drgań ciężarka zawieszonego na dwu połączonych ze sobą sprężynach (rys.), których współczynniki sprężystości są odpowiednio równe k_1 i k_2. Masy sprężyn zaniedbać.



Na każdą z tych sprężyn działa taka sama siła F równa ciężarowi zawieszonego ciała. Można więc zapisać:

$$F = k_1 \cdot \Delta x_1, \qquad F = k_2 \cdot \Delta x_2.$$

Zatem każda ze sprężyn wydłuży się o:

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}, \qquad \Delta x_1 = \frac{F}{k_1}.$$

Dla układu złożonego z dwóch sprężyn można wprowadzić wypadkowy współczynnik sprężystości k i zapisać związek między działającą siłą F a wypadkowym wydłużeniem:

$$F = k \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2).$$

Więc:

$$F = k \cdot \left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right).$$

Z tego równania, po uproszczeniu siły F, otrzymujemy wzór na wypadkowy współczynnik sprężystości układu:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Można więc teraz obliczyć okres drgań tego układu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

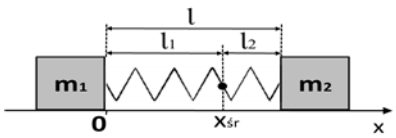
J.B.

Zadanie 17

Na idealnie gładkiej poziomej powierzchni leżą dwa klocki o masach m_1 i m_2 przymocowane do końców nieważkiej sprężyny o współczynniku sprężystości k. Klocki są połączone sznurkiem o długości mniejszej niż długość swobodnej sprężyny. Przecięcie sznurka wprawia układ w drgania swobodne. Jaki jest okres drgań obu klocków?

Rozwiązanie

Z zasady zachowania pędu wynika, że po przecięciu sznurka całkowity pęd układu dalej jest równy zeru, czyli pędy obu ciał są przez cały czas przeciwne, a więc ich prędkości też. Stąd wniosek, że zwroty prędkości obu klocków zmieniają się jednocześnie, czyli częstotliwości ich drgań są jednakowe. Ponadto skoro przed przecięciem sznurka środek masy układu spoczywał to, ponieważ z zewnątrz nie działa żadna siła, również po przecięciu sznurka środek masy spoczywa. Wyznaczmy położenie środka masy układu na osi $x_{śr}$ (rys.) pomijając rozmiary klocków (zakładamy, że ich masy są skupione w punktach końcowych sprężyny czyli m_1 w $x_1 = 0$ oraz m_2 w $x_2 = l$) i zakładając, że długość swobodnej sprężyny wynosi l.



$$x_{śr} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}.$$

Ponieważ w trakcie drgań środek masy jest nieruchomy, to można uważać, że masa m_1 drga połączona do sprężyny zaczepionej w jej nieruchomym końcu odpowiadającym położeniu środka masy. Zatem długość tej sprężyny wynosi

$$l_1 = x_{śr}.$$

Ustalmy teraz jaki jest współczynnik sprężystości k_1 sprężyny o długości l_1 znając współczynnik sprężystości k sprężyny różniącej się tylko długością, której wartość wynosi l. Pod wpływem określonej siły F bez względu na długość całkowitą sprężyny wydłużenie przypadające na jednostkę długości jest jednakowe, czyli:

$$\frac{\Delta x_1}{l_1} = \frac{\Delta x}{l},$$

więc:

$$\Delta x_1 = \frac{l_1}{l} \Delta x.$$

Można więc zapisać równania na wartość siły sprężystości:

$$F = k \cdot \Delta x \qquad F = k_1 \cdot \Delta x_1,$$

czyli:

$$k \cdot \Delta x = k_1 \cdot \Delta x_1.$$

Wykorzystując równanie na Δx_1 otrzymamy:

$$k \cdot \Delta x = k_1 \frac{l_1}{l} \Delta x.$$

Stąd:

$$k_1 = k \frac{l}{l_1}.$$

Można teraz obliczyć okres drgań masy m$_1$ podłączonej do sprężyny o długości l_1 (równej x$_{śr}$).

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k\frac{l}{l_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k\frac{l}{\frac{m_2 l}{(m_1+m_2)}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$$

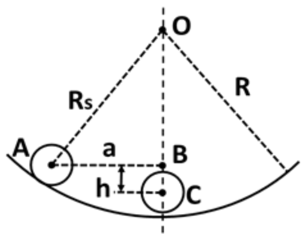
Powtarzając rozumowanie otrzyma się identyczny rezultat dla masy m$_2$ podłączonej do sprężyny o długości $l_2 = l - l_1$.

J.B.

J.B.

Zadanie 19

Mała kulka o promieniu r stacza się po powierzchni sferycznej rozpoczynając ruch w punkcie A (rys.) Wyznaczyć promień krzywizny R powierzchni, jeśli AB = a, a okres drgań kulki wynosi T.



Rozwiązanie

W pierwszym kroku wyznaczmy promień R$_s$ łuku, po którym porusza się środek kulki. Z zasady zachowania energii dla punktów A i C mamy:

$$mgh = \frac{mv_{max}^2}{2} + \frac{I\omega_{max}^2}{2}$$

Pamiętając, że moment bezwładności kulki $I = \frac{2}{5}mr^2$, oraz że $v_{max} = r\omega_{max}$ z powyższego równania otrzymamy równanie:

$$mgh = 0.7mv_{max}^2 \qquad (1)$$

Z trójkąta ABO mamy:

$$h = R_s - \sqrt{R_s^2 - a^2} \qquad (2)$$

Ogólne równanie na prędkość w drganiach harmonicznych (bez fazy początkowej) ma postać:

$$v = v_{max} cos\frac{2\pi}{T}t$$

gdzie: $v_{max} = \frac{2\pi a}{T}$ (3)

a - amplituda drgań.

Jednak, żeby móc stosować przybliżenie drgań harmonicznych amplituda drgań **a** powinna być znacznie mniejsza niż R$_s$:

$$a << R_s \qquad (4)$$

Po wstawieniu wyrażenia (2) na h oraz (3) na v$_{max}$ do równania (1) i wykorzystując warunek (4) otrzymujemy:

$$R_s = \frac{5}{7}\frac{gT^2}{4\pi^2} + \frac{a^2}{4\left(\frac{5}{7}\frac{gT^2}{4\pi^2}\right)} = R_{s,p} + \frac{a^2}{4R_{s,p}} \approx R_{s,p} = \frac{5}{7}\frac{gT^2}{4\pi^2}$$

gdzie wprowadzono symbol $R_{s,p}$ oznaczający przybliżoną wartość R_s (również $a << R_{s,p}$) .

Więc ostatecznie:

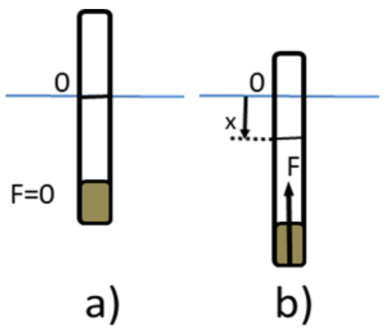
$$R = R_{s,p} + r = \frac{5}{7}\frac{gT^2}{4\pi^2} + r$$

J.B.

Zadanie 20

Probówka obciążona śrutem pływa częściowo zanurzona w wodzie o gęstości ϱ. W pewnej chwili probówka została wepchnięta na pewną głębokość do wody i puszczona swobodnie. Obliczyć okres T drgań własnych probówki, jeśli pole przekroju poprzecznego probówki wynosi S, a masa probówki ze śrutem wynosi m. Pomiń opory ruchu wynikające z lepkości cieczy.

Rozwiązanie



Na rysunku a, gdy probówka pływa nieruchomo, siła ciężkości równoważona jest siłą wyporu, a więc wypadkowa siła F działająca na probówkę jest równa zeru. Na rysunku b probówka jest dodatkowo zanurzona na głębokość x więc pojawia się niezrównoważona siła F wynikająca z siły wyporu odpowiadającej temu dodatkowemu zanurzeniu.

$$\vec{F} = -\varrho g S\vec{x}$$

Porównując ten wzór ze wzorem na siłę sprężystości ($\vec{F} = -k\vec{x}$) możemy wywnioskować, że współczynnik sprężystości $k = \varrho g S$.

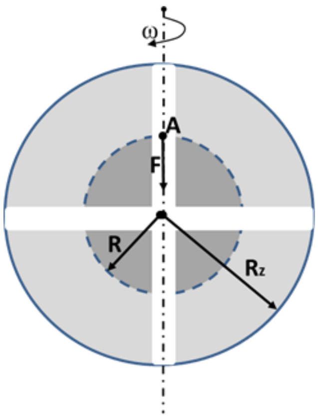
Czyli okres drgań probówki wyniesie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho g S}{m}}.$$

J.B.

Zadanie 21

Załóżmy, że wzdłuż średnicy Ziemi wydrążono tunel na przestrzał. Z jednej strony otworu z poziomu powierzchni Ziemi puszczono swobodnie ciało (siły oporu powietrza i tarcie między ciałem a ścianą tunelu pomijamy). Jakim ruchem porusza się ciało jeżeli **a)** tunel jest wydrążony wzdłuż osi obrotu Ziemi (rys), **b)** tunel jest wydrążony w płaszczyźnie równika. Załóżmy, że Ziemia ma stałą gęstość w całej objętości. W przypadku ruchu periodycznego oblicz okres tego ruchu. Dane są jedynie przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi g_z =9,81 m/s^2, oraz promień Ziemi R_z=6400km.



Rozwiązanie

a)

Jeżeli ciało porusza się wzdłuż osi obrotu to działa na nie jedynie siła grawitacji. Z prawa Gaussa dla pola grawitacyjnego wynika, że na ciało znajdujące się w punkcie A (odległym od środka Ziemi o R) działa siła grawitacji F pochodząca od kuli o promieniu R (rys), a nie od całej Ziemi (precyzyjnie mówiąc zewnętrzna część Ziemi o promieniu większym od R też oddziałuje na ciało siłą grawitacji tylko, że te oddziaływania od różnych elementów należących do części zewnętrznej znoszą się do zera). Zatem:

$$F = G\frac{M_R m}{R^2},$$

gdzie:

m - masa ciała,

M_R - masa kuli o promieniu R.

$$M_R = \varrho\frac{4}{3}\pi R^3,$$

więc:

$$F = \frac{4}{3}\pi G\varrho m R$$

gdzie: ϱ - gęstość Ziemi.

Z równania tego widać, że siła działająca na ciało jest wprost proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi czyli ze środka kuli i skierowana jest w jego stronę. Wynika stąd, że wartość tej siły zmienia się tak samo jak wartość siły w drganiach harmonicznych (F=kx). Można stąd wyciągnąć wniosek, że w naszym przypadku współczynnik sprężystości jest równy:

$$k = \frac{4}{3}\pi G\varrho m.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\varrho = \frac{M_z}{\frac{4}{3}\pi R_z^3},$$

oraz, że na powierzchni Ziemi ciężar ciała można wyrazić na dwa sposoby:

$$m g_z = G\frac{M_z m}{R_z^2},$$

współczynnik sprężystości można wyrazić następująco:

$$k = \frac{m g_z}{R_z}.$$

Zatem ciało drga harmonicznie z okresem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_z}{g_z}} = 5072{,}4\,s = 1h\;24\,\mathrm{min}\;32\,s.$$

b)

Jeżeli ciało porusza się w tunelu wydrążonym w płaszczyźnie równika to oprócz siły grawitacji działa na nie siła odśrodkowa bezwładności (w układzie nieinercjalnym). Zatem w rozwiązaniu z punktu **a** należy dodatkowo uwzględnić siłę $F = m\omega^2 R.$ a więc

$$F = G\frac{M_R m}{R^2} - m\omega^2 R,$$

gdzie: ω - prędkość kątowa ruchu obrotowego Ziemi wokół własnej osi.
$\omega = \frac{2\pi}{T_z}$, gdzie T_z = 24h.
Więc:

$$F = \left(\frac{4}{3}\pi G\varrho m - m\omega^2\right)\cdot R$$

Z równania tego widać, że również w tym przypadku siła działająca na ciało jest wprost proporcjonalna do wychylenia ciała z położenia równowagi i skierowana jest w jego stronę, czyli ruch jest drganiem harmonicznym. Można stąd wyciągnąć wniosek, że w tym przypadku współczynnik sprężystości można wyrazić następująco (patrz punkt **a**):

$$k = m\left(\frac{g_z}{R_z} - \omega^2\right).$$

Zatem ciało drga harmonicznie z okresem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{g_z}{R_z}-\omega^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{g_z}{R_z}-\left(\frac{2\pi}{T_Z}\right)^2}} = 5081{,}2\ s = 1h\ 24\min 41\ s.$$

Czyli w wyniku obrotu Ziemi wokół własnej osi okres drgań harmonicznych wydłużył się w przypadku **b** o 9 s w porównaniu z okresem drgań w przypadku **a**.
Uwaga: Zadanie było czysto hipotetyczne. Do tej pory ludziom najgłębiej w skorupę Ziemi udało wkopać się zaledwie na głębokość ok. 13 km, a promień Ziemi to aż ok. 6370km

J.B.

Zadanie 22

Dwa spójne źródła drgające w zgodnych fazach wysyłają fale płaskie, poprzeczne o jednakowych amplitudach A i częstościach ω . Do miejsca spotkania fale te przebywają odpowiednio drogi x_1=1,4 m oraz x_2=1,5 m. W miejscu spotkania fale te wywołują równoległe drgania cząsteczek ośrodka. Wyznaczyć równanie tych drgań. Długości fal są równe λ = 0.3 m.

Rozwiązanie
Równanie fali płaskiej ma postać:

$$\psi(x,t) = Acos(\omega t - kx + \varphi_o)$$

gdzie:
ω - częstość fali,
k - wektor falowy, k=2π/λ,
φ_o - faza początkowa źródła fali.

Oba źródła drgają zgodnie w fazie więc mają jednakowe fazy początkowe φ_o.
W miejscu spotkania się obu fal każda fala z osobna wywołuje następujące drgania cząstki:

$$\psi_1(x_1,t) = Acos(\omega t - kx_1 + \varphi_o)$$
$$\psi_2(x_2,t) = Acos(\omega t - kx_2 + \varphi_o)$$

Ponieważ fale w miejscu spotkania wywołują drgania równoległe to drganie wypadkowe w tym miejscu jest sumą algebraiczną obu drań składowych.

$$\psi(t) = \psi_1(x_1,t) + \psi_2(x_2,t) = A_{wyp}cos\big(\omega t + \varphi_{wyp}\big)$$

czyli drganie wypadkowe wywołane równoległymi drganiami harmonicznymi o tych samych częstościach jest też drganiem harmonicznym o tej samej częstości. Z ogólnej zależności na amplitudę wynika, że amplituda wypadkowego drgania dla jednakowych amplitud obu drgań składowych jest równa:

$$A_{wyp} = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\ ,$$

gdzie:

φ_1 - faza pierwszej fali w miejscu spotkania ($\varphi_1 = \ \omega t - kx_1 + \varphi_o$),

φ_2 - faza drugiej fali w miejscu spotkania ($\varphi_2 = \ \omega t - kx_2 + \varphi_o$).

Zatem różnica faz jest równa:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{0{,}3}(1{,}5 - 1{,}4) = \frac{2\pi}{3}\ ,$$

więc

$$A_{wyp} = A\sqrt{2}\sqrt{1 + cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = A\sqrt{2}\sqrt{1 - 0{,}5} = A$$

Fazę początkową drgania wypadkowego obliczymy z ogólnej zależności, pamiętając jednak o równości amplitud drgań składowych:

$$tg\ \varphi_{wyp} = \frac{Asin(-kx_1 + \varphi_o) + Asin(-kx_2 + \varphi_o)}{Acos(-kx_1 + \varphi_o) + Acos(-kx_2 + \varphi_o)}\ .$$

Po uproszczeniu przez A i skorzystaniu ze wzorów na sumę sinusów i kosinusów otrzymamy:

$$\varphi_{wyp} = -k\frac{x_1 + x_2}{2} + \varphi_o$$

Ostatecznie równanie drgań wywołane nałożeniem się obu fal ma postać:

$$\psi(t) = Acos\left(\omega t - k\frac{x_1 + x_2}{2} + \varphi_o\right).$$

Do tego rozwiązania doszliśmy przy pomocy ogólnych wzorów na składanie harmonicznych drgań równoległych o jednakowych częstościach. Jednak w tym szczególnym przypadku, w którym spotykające się fale mają jednakowe amplitudy można było znaleźć rozwiązanie znacznie prościej, a mianowicie:

$$\psi(t) = \psi_1(x_1,t) + \psi_2(x_2,t) = \ Acos(\omega t - kx_1 + \varphi_o) + \ Acos(\omega t - kx_2 + \varphi_o)\,.$$

Po wyłączeniu A przed nawias i skorzystaniu ze wzoru na sumę kosinusów otrzymuje się takie samo rozwiązanie co wcześniej.

J.B.

Termodynamika

Zadanie 23

Określić wzór chemiczny amoniaku, jeżeli wiadomo, że przy ciśnieniu p =1041 hPa i w temperaturze 20°C jego gęstość wynosi ϱ = 0,736 kg/m³.

Rozwiązanie
Z równania Clapeyrona określimy masę molową amoniaku M_a:

$$pV = nRT$$

Pamiętamy też, że liczba moli $n = \frac{m}{M_a}$, oraz o tym, że gęstość $\varrho = \frac{m}{V}$.
Otrzymujemy więc:

$$M_a = \frac{\varrho RT}{p} = 17kg/kmol.$$

Wiedząc, że cząstka amoniaku złożona jest z atomów azotu i wodoru, oraz uwzględniając odpowiednio masy atomowe tych gazów: M_N = 14 kg/kmol i M_H = 1 kg/kmol, możemy zapisać równanie:

$$M_a = x_N M_N + x_H M_H$$

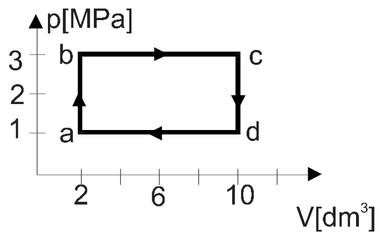
czyli:

$$17 = 14x_N + x_H \text{ [w jednostkach masy]}$$

Szukając rozwiązania w zbiorze liczb naturalnych otrzymamy wzór sumaryczny cząsteczki amoniaku: NH_3.

J.B.

Zadanie 24
Na wykresie przedstawiony jest cykl przemian termodynamicznych 0,5 mola gazu doskonałego. **1)** Ile wynosi praca wykonana przez gaz w czasie pełnego cyklu przemian? **2)** Jaka jest temperatura gazu w stanie d? **3)** Ile ciepła wymienił gaz z otoczeniem w przemianie d→a ? Czy to ciepło zostało pobrane czy oddane przez gaz? **4)** O ile zmieniła się energia wewnętrzna gazu w przemianie d→a ? (Stała gazowa R=8.31 J/(mol·K)



Rozwiązanie
1) Praca w pełnym cyku jest równa polu zamkniętemu tym cyklem:

$$W = (3-1)\cdot(10-2) MPa\, dm^3 = 16\ kJ.$$

2) Temperaturę w stanie d obliczymy z równania Clapeyrona.

$$p_d V_d = nRT_d$$

$$T_d = \frac{p_d V_d}{nR} = 2407\ K$$

3) Przemiana d→a jest izobaryczna, więc wymienione ciepło z otoczeniem wyraża się wzorem:

$$\Delta Q = nC_p(T_a - T_d).$$

Obliczmy ciepło molowe gazu pod stałym ciśnieniem:

$$C_p = \frac{i+2}{2}R = \frac{5}{2}R$$

gdzie i - liczba stopni swobody cząsteczek gazu. Dla gazu idealnego (cząstki jednoatomowe) i=3.

Zatem:

$$\Delta Q = nC_p(T_a - T_b) = n\frac{5}{2}R\left(\frac{p_aV_a}{nR} - \frac{p_dV_d}{nR}\right) = \frac{5}{2}(p_aV_a - p_dV_d) = -20\ kJ$$

Ujemny znak oznacza, że gaz oddał ciepło do otoczenia.

4) W przemianie d→a energia wewnętrzna zmieniła się o:

$$\Delta U = nC_V(T_a - T_d),$$

gdzie C_V jest ciepłem molowym gazu w stałej objętości.

$$C_V = \frac{i}{2}R = \frac{3}{2}R.$$

Więc:

$$\Delta U = nC_V(T_a - T_b) = n\frac{3}{2}R\left(\frac{p_aV_a}{nR} - \frac{p_dV_d}{nR}\right) = \frac{3}{2}(p_aV_a - p_dV_d) = -12\ kJ$$

Zauważmy, że zmianę energii wewnętrznej w tej przemianie można było również obliczyć z I zasady termodynamiki.

$$\Delta U = \Delta Q - W$$

gdzie W jest pracą wykonaną przez gaz nad otoczeniem.

$$W = p_a(V_a - V_d) = -8\ kJ.$$

Praca ta jest ujemna, bo to otoczenie wykonało pracę nad gazem sprężając go.
W tej przemianie wymienione z otoczeniem ciepło zostało obliczone w punkcie 3, a więc:

$$\Delta U = \Delta Q - W = -20\ kJ - (-8\ kJ) = -12\ kJ$$

J.B.

Zadanie 25

W chłodnicy silnika cieplnego znajduje się masa m lodu o temperaturze T_2=273 K. Po wykonaniu przez silnik pracy W lód w chłodnicy stopił się . Obliczyć minimalną, możliwą temperaturę T_1 źródła ciepła.

Rozwiązanie

Podczas pracy silnika wydziela się z niego ciepło Q_2, które ze względu na to, że lód ma temperaturę 273 K, w całości idzie na jego stopienie (nie trzeba podgrzewać lodu do temperatury topnienia)

$$Q_2 = mL$$

gdzie L - ciepło topnienia lodu (z tablic).

Ponieważ pytanie jest o najniższą możliwą temperaturę źródła ciepła, to znaczy że silnik musi mieć najwyższą sprawność, a więc musi mieć sprawność idealnej maszyny cieplnej. Zatem jego sprawność można wyrazić na dwa sposoby:

$$\eta = \frac{W}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Ponadto wiadomo, że praca W z ciepłem pobranym Q_1 i ciepłem oddanym Q_2 jest związana równaniem:

$$W = Q_1 - Q_2.$$

Z powyższych równań otrzymujemy:

$$T_1 = T_2 \frac{W + mL}{mL}.$$

J.B.

Zadanie 26

Azot w ilości 12 g znajduje się w zamkniętym naczyniu o objętości 2 l w temperaturze 10^oC. Po ogrzaniu ciśnienie w naczyniu wyniosło do 10^4 mm Hg. Jaka ilość ciepła została dostarczona gazowi podczas ogrzewania? (Stała gazowa R=8.31 J/(mol·K))

Rozwiązanie

Dane:

m = 12g

V = 2 l = $2dm^3 = 2\cdot10^{-3}\ m^{-3}$

$T_1 = 10^oC = 283$ K

$p_2 = 10^4$ mm Hg = $1.33\cdot10^6$ Pa (wykorzystano wzór $p = \varrho_{Hg}gh$)

μ_{N2} = 28 g/mol - masa molowa azotu

Dostarczone ciepło w przemianie izochorycznej obliczymy ze wzoru:

$$\Delta Q = nC_V(T_2 - T_1)$$

gdzie:

$n = \frac{m}{\mu_{N2}}$ - liczba moli gazu

$C_V = \frac{i}{2}R$ - ciepło molowe w stałej objętości gazu złożonego z cząstek o i stopniach swobody. Cząstki gazowego azotu są dwuatomowe więc i=5.

W celu wyznaczenia temperatury T_2 po przemianie wykorzystamy równanie Clapeyrona:

$$p_2V = nRT_2.$$

Zatem:

$$\Delta Q = \frac{5}{2}\left(p_2V - \frac{m}{\mu_{N2}}RT_1\right) = 4151J$$

J.B.

Zadanie 27

Tlen w ilości 10 g znajduje się pod ciśnieniem $3\cdot10^5$ N/m² i temperaturze 10^oC. Po ogrzaniu pod stałym ciśnieniem gaz zajął objętość 10 l. Znaleźć: 1) ilość ciepła pobraną przez gaz, 2) energię ruchu cieplnego wszystkich cząsteczek gazu przed ogrzaniem i po ogrzaniu, 3) Czy różnica obliczonych energii w pkt.2 jest równa pobranemu ciepłu obliczonemu w pkt. 1? Jeżeli nie, to co się stało z nadwyżką energii? . (Stała gazowa R=8.31 J/(mol·K))

Rozwiązanie
dane:
m = 10 g
p = $3\cdot 10^5$ N/m^2
T_1 = 10°C = 283 K
V_2 = 10 l = 10^{-2} m^3
μ_{O2} = 32 g/mol - masa molowa tlenu

Dostarczone ciepło w przemianie izobarycznej obliczymy ze wzoru:

$$\Delta Q = nC_p(T_2 - T_1)$$

gdzie:
$n = \frac{m}{\mu_{O2}}$ - liczba moli gazu

$C_p = \frac{i+2}{2}R$ - ciepło molowe dla przemiany izobarycznej gazu złożonego z cząstek o i stopniach swobody. Cząstki gazowego tlenu są dwuatomowe więc i=5.

W celu wyznaczenia temperatury T_2 po przemianie wykorzystamy równanie Clapeyrona:

$$pV_2 = nRT_2.$$

Zatem:

$$\Delta Q = \frac{7}{2}\left(pV_2 - \frac{m}{\mu_{O2}}RT_1\right) = 7928J$$

Obliczmy teraz energię ruchu cieplnego wszystkich cząstek gazu (czyli jego energię wewnętrzną) przed przemianą:

$$U_1 = N\,\overline{E_{k1}}$$

gdzie:
N - liczba cząsteczek gazu, $N = n\,N_A$ (N_A - liczba Avogadra)
$\overline{E_{k1}}$ - średnia energia kinetyczna pojedynczej cząstki przed przemianą .
$\overline{E_{k1}} = \frac{i}{2}kT_1$ (k - stała Boltzmana)
Więc:

$$U_1 = nN_A\frac{i}{2}kT_1 = \frac{i}{2}nRT_1 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu_{O2}}RT_1 = 1837J$$

W ostatnim równaniu wykorzystano związek między stałymi: $R = N_A k$.

Podobnie można dojść do wzoru na energię ruchu cieplnego wszystkich cząstek gazu po przemianie.

$$U_2 = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu_{O2}}RT_2 = 7500J$$

W wyniku dostarczonego ciepła energia wewnętrzna gazu wzrosła o:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 5663J$$

Zatem tylko część dostarczonego ciepła spowodowała wzrost energii wewnętrznej gazu.

$$\Delta Q - \Delta U = 7928J - 5663J = 2265J$$

Ta nadwyżka energii została zużyta na wykonanie przez gaz pracy nad otoczeniem.

J.B.

Zadanie 28

Gaz doskonały rozprężając się izobarycznie, wykonuje pracę W = 600 J. Obliczyć ilość ciepła, którą pobrał gaz, jeżeli stosunek ciepła właściwego gazu pod stałym ciśnieniem do ciepła właściwego w stałej objętości wynosi $\varkappa$=1,4.

Rozwiązanie:

W przemianie izobarycznej praca jest równa:

$$W = p\Delta V.$$

Wykorzystując równanie Clapeyrona dla gazu idealnego wyrażenie pΔV można wyrazić jeszcze inaczej:

$$p\Delta V = nR\Delta T.$$

Ciepło dostarczone do gazu w przemianie izobarycznej można zapisać wzorem:

$$\Delta Q = nC_p\Delta T.$$

Rozwiązując uzyskany układ równań otrzymujemy:

$$\Delta Q = W\frac{1}{\frac{R}{C_p}}.$$

Należy wykorzystać jeszcze równanie Mayera:

$$R = C_p - C_V,$$

oraz fakt, że stosunek ciepła molowego przy stałym ciśnieniu do ciepła molowego przy stałej objętości jest równy stosunkowi ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości. Ostatecznie uzyskujemy odpowiedź:

$$\Delta Q = W\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 2100J$$

J.B.

Zadanie 29

Gaz o temperaturze T_1 sprężono izochorycznie od ciśnienia p_1 do ciśnienia p_2. Obliczyć zmianę energii wewnętrznej ΔU n moli tego gazu. Dany jest stosunek $\varkappa = C_p/C_v$.

Rozwiązanie

Z równania Clapeyrona mamy:

$$p_1V = nRT_1$$
$$p_2V = nRT_2\ ,$$

a stąd:

$$T_2 = T_1\frac{p_2}{p_1}.$$

Zmiana energii wewnętrznej:

$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = nC_V\left(T_1\frac{p_2}{p_1} - T_1\right).$$

Pamiętamy, że

$$R = C_p - C_V \quad \text{(rów. Mayera)}$$
$$\varkappa = \frac{C_p}{C_V}$$

Z ostatniego układu równań dostajemy:

$$C_V = \frac{R}{\varkappa - 1},$$

więc:

$$\Delta U = nC_V\left(T_1\frac{p_2}{p_1} - T_1\right) = \frac{nRT_1}{\varkappa - 1}\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right).$$

J.B.

Zadanie 30